А. Г. Хованский

Топологическая теория Галуа

Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде

Издательство МЦНМО
Москва 2008

УДК 512.623.3+512.628.2
ББК 22.14
Х68

Хованский А. Г.

Х68 Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде. — М.: Изд-во МЦНМО, 2008. — 296 с.

ISBN 978-5-94057-374-6

Книга посвящена вопросу о неразрешимости уравнений в явном виде. В ней дается полное изложение топологического варианта теории Галуа, полученного автором. В книге изложены также приложения теории Галуа к разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, элементы теории Пикара–Вессио, и результаты Лиувилля о классе функций, представимых в квадратурах.

Для студентов-математиков, аспирантов и научных сотрудников.

ББК 22.14

ISBN 978-5-94057-374-6

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. РАЗРЕШИМОСТЬ И НЕРАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ

Многочисленные неудачные попытки решения ряда алгебраических и дифференциальных уравнений «в конечном» («в явном») виде привели математиков к убеждению, что явных решений для этих уравнений просто не существует. Настоящая книга посвящена вопросу о неразрешимости уравнений в конечном виде (в особенности топологическим препятствиям к такой разрешимости). Этот вопрос имеет богатую историю.

Первые доказательства неразрешимости алгебраических уравнений в радикалах были найдены Абелем и Галуа. Обдумывая задачу о нахождении в явном виде неопределенного интеграла от алгебраической дифференциальной формы, Абель заложил основы теории алгебраических кривых. Лиувилль продолжил работы Абеля и доказал неэлементарность неопределенных интегралов многих алгебраических и элементарных дифференциальных форм. Неразрешимость в квадратурах ряда линейных дифференциальных уравнений тоже впервые была доказана Лиувиллем.

Еще Галуа связал вопрос о разрешимости в радикалах со свойствами некоторой конечной группы (так называемой группы Галуа алгебраического уравнения). Собственно, само понятие конечной группы было введено Галуа именно в связи с этим вопросом. Софус Ли ввел понятие непрерывной группы преобразований, пытаясь явно решать дифференциальные уравнения и приводить их к более простому виду. Пикар с каждым линейным дифференциальным уравнением связал его группу Галуа, которая является группой Ли (и, более того, является алгебраической матричной группой). Пикар и Вессио показали, что именно эта группа отвечает за разрешимость уравнений в квадратурах. Колчин развил теорию алгебраических групп, придал теории Пикара—Вессио законченный вид и обобщил ее на случай голономных систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

В. И. Арнольд обнаружил, что ряд классических вопросов математики неразрешим из-за топологических причин. В частности, он показал, что алгебраическое уравнение общего вида степени 5 или выше не решается в радикалах именно по топологическим причинам. Развивая подход Арнольда, в начале семидесятых годов я построил одномерный вариант топологической теории Галуа. Согласно этой теории топология расположения римановой поверхности аналитической функции над плоскостью комплексного переменного может препятствовать представимости этой функции при помощи явных формул. На этом пути получаются наиболее сильные из известных результатов о непредставимости функций явными формулами. Недавно мне удалось обобщить эти топологические результаты на случай многих переменных.

В книге излагается топологическая теория Галуа: приводится полное и подробное изложение одномерного варианта теории и (более схематическое) изложение многомерного варианта. Топологическая теория тесно связана как с обычной (алгебраической), так и с дифференциальной теориями Галуа.

(Обычная) теория Галуа проста и идейно связана с топологической теорией. В «разрешительной» части топологической теории используется не только линейная алгебра, но и результаты теории Галуа. Теория Галуа и ее применения к разрешимости алгебраических уравнений в радикалах излагаются в книге со всеми доказательствами. Кроме задачи о разрешимости в радикалах рассматриваются и другие близкие задачи, например задача о разрешимости уравнения при помощи радикалов и вспомогательных уравнений степени, не превосходящей k.

Основные теоремы теории Пикара—Вессио формулируются без доказательств. Подчеркивается их аналогия с теорией Галуа. Обсуждается, почему теория Пикара—Вессио (по крайней мере, в принципе) отвечает на вопросы о разрешимости линейных дифференциальных уравнений в явном виде. «Разрешительная» часть топологической теории Галуа (доказывающая, например, разрешимость в квадратурах линейных дифференциальных уравнений типа Фукса с разрешимой группой монодромии) использует лишь простую, линейно-алгебраическую часть теории Пикара—Вессио. Эта линейная алгебра излагается в книге. «Запретительная» часть топологической теории Галуа (доставляющая, например, результаты о неразрешимости линейных дифференциальных уравнений с неразрешимой группой монодромии) изложена со всеми подробностями. Она сильнее, чем «запретительная» часть теории Пикара—Вессио.

В книге обсуждается также красивое построение Лиувилля класса элементарных функций, класса функций, представимых в квадратурах, и т. д. и его теория, оказавшая большое влияние на все дальнейшие работы в этой области.

В книге идет речь о трех вариантах теории Галуа — обычном, дифференциальном и топологическом. Эти варианты объединяет общий подход к задачам о разрешимости и неразрешимости уравнений, основанный на теории групп. Неверно, однако, что все результаты о разрешимости и неразрешимости связаны с теорией групп. Ряд ярких результатов, основанных на другом подходе, содержится в теории Лиувилля. Чтобы дать представление о теории Лиувилля, мы приводим полное доказательство его теоремы о неэлементарности некоторых неопределенных интегралов (в частности, неопределенных интегралов от ненулевых голоморфных дифференциальных форм на алгебраических кривых положительного рода).

В книге не всегда соблюдается историческая последовательность. Например, теорема Пикара—Вессио о разрешимости линейных дифференциальных уравнений в квадратурах была доказана раньше, чем основная теорема дифференциальной теории Галуа. Однако теорема Пикара—Вессио является прямым следствием этой основной теоремы, и именно так она представляется в настоящей книге.

Несколько слов о литературе. Изложение метода Лиувилля можно найти в замечательной книге Ритта [29]. Обычная теория Галуа хорошо излагается во многих местах, например в [51], [52]. Короткое и ясное изложение теории Пикара—Вессио содержится в книге Капланского [19], более современное и обстоятельное — в книге Зингера и Ван ден Пута [34]. Теория Колчина изложена в [20], [21]. Имеется также интересный обзор Зингера [32] о разрешимости и неразрешимости уравнений в явном виде, содержащий обширную библиографию.

О нумерации: «лемма 6.4 из главы 5» означает четвертое отдельно сформулированное утверждение в параграфе шесть пятой главы. Аналогично нумеруются остальные теоремы, утверждения, следствия и леммы (если ссылка идет внутри той же главы, то номер главы не указывается). Формулы во всей книге имеют сплошную нумерацию.

Мои первые результаты по одномерной топологической теории Галуа появились в начале 70-х годов. Тогда моим научным руководителем был В. И. Арнольд, который и заинтересовал меня этой тематикой. Я бесконечно благодарен Владимиру Игоревичу. В свое время я не опубликовал полного изложения результатов: сначала не мог разобраться в сложной истории предмета, а потом занялся совсем другой математикой. Я признателен А. А. Болибруху, который побудил меня вернуться к этой теме, и моей жене Т. В. Белокриницкой, которая помогла подготовить книгу к печати.

§ 2. Постановка задачи о разрешимости уравнений в конечном виде

Некоторые алгебраические и дифференциальные уравнения «решаются явно». Что это значит? Если решение предъявлено, оно само и дает ответ на этот вопрос. Обычно все же попытки явного решения уравнений оказываются безуспешными. Возникает желание доказать, что для тех или иных уравнений явных решений не существует. Тут уже просто необходимо точно определить, о чем идет речь (иначе непонятно, что, собственно, мы собираемся доказать). С современной точки зрения в классических работах недостает четких определений и формулировок теорем. Лиувилль, несомненно, точно понимал, что он доказывает. Он не только сформулировал задачи о разрешимости уравнений в элементарных функциях и квадратурах, но и алгебраизировал эти задачи. После его работ все эти понятия удалось определить над любым дифференциальным полем. Но требования к математической строгости во времена Лиувилля были не такие, как сейчас. Согласно Колчину (см. [20]), даже у Пикара основные определения еще недостаточно продуманы. Работы Колчина вполне современны, но его определения с самого начала даются для абстрактных дифференциальных полей.

Все же неопределенный интеграл элементарной функции или решение линейного дифференциального уравнения являются функциями, а не элементами абстрактного дифференциального поля. В функциональных пространствах кроме дифференцирования и арифметических операций есть, например, абсолютно неалгебраическая операция суперпозиции. Вообще, в функциональных пространствах больше средств для написания «явных формул», чем в абстрактных дифференциальных полях. Кроме этого, приходится учитывать, что функции бывают многозначными, имеют особенности и т. д.

Формализовать задачу о неразрешимости уравнений в явном виде в функциональных пространствах несложно (в книге мы будем интересоваться именно этой задачей). Сделать это можно так: можно выделить тот или иной класс функций и сказать, что уравнение решается явно, если его решение принадлежит этому классу. Разные классы функций соответствуют разным понятиям разрешимости.

2.1. Задание класса функций с помощью списков основных функций и допустимых операций. Класс функций можно выделить, задав список *основных функций* и список *допустимых операций*. После этого класс функций определяется как множество всех функций, которые получаются из основных функций при помощи применения допустимых операций. В п. 2.2 именно таким способом определяются лиувиллевские классы функций.

Лиувиллевские классы функций, фигурирующие в задачах о разрешимости в конечном виде, содержат многозначные функции. В связи с этим исходные понятия нужно уточнить. В этом пункте принимается «глобальный» вариант работы с многозначными функциями, приводящий к расширенному пониманию определения класса функций, заданного списками основных функций и допустимых операций. В глобальном варианте многозначная функция рассматривается как единый объект. Определяются *операции над многозначными функциями*. Результатом применения этих операций является некоторое множество многозначных функций, про каждую из которых говорится, что она получена применением заданной операции к заданным функциям. *Класс функций* определяется как множество всех (многозначных) функций, которые получаются из основных функций при помощи допустимых операций.

Определим, например, что такое сумма двух многозначных функций одной переменной.

Определение. Возьмем произвольную точку a на комплексной прямой, один из ростков f_a аналитической функции f в точке a и один из ростков g_a аналитической функции g в той же точке a. Будем говорить, что многозначная функция φ, порожденная ростком $\varphi_a = f_a + g_a$, *представима в виде суммы* функций f и g.

Например, легко видеть, что ровно две функции представляются в виде $\sqrt{x}+\sqrt{x}$: это $f_1=2\sqrt{x}$ и $f_2\equiv 0$. Абсолютно аналогично определяются и другие операции над многозначными функциями. *Замкнутость какого-либо класса многозначных функций относительно сложения означает, что этот класс вместе с любыми двумя функциями содержит все функции, представимые в виде их суммы.* То же самое нужно сказать и про все другие операции над многозначными функциями, понимаемые в указанном выше смысле.

В приведенном выше определении важную роль играет не только сама операция сложения, но и операция аналитического продолжения, спрятанная в понятии многозначной функции. Действительно, рассмотрим следующий пример. Пусть f_1 — аналитическая функция, определенная в области U комплексной прямой $\mathbb{C}^1$, не продолжающаяся аналитически за пределы области U, и пусть f_2 — аналитическая функция в области U, определенная равенством $f_2=-f_1$. Согласно данному определению функция, тождественно равная нулю, представима в виде f_1+f_2 *на всей комплексной прямой*. Согласно общепринятой точке зрения равенство $f_1+f_2=0$ справедливо только в области U, но не вне ее.

В глобальном варианте работы с многозначными функциями мы не настаиваем на существовании *единой области*, в которой все нужные действия производились бы над однозначными ветвями многозначных функций. Одна операция может производиться в одной области, а другая операция — в другой области над аналитическими продолжениями полученных функций. В сущности, это расширенное понимание операций эквивалентно добавлению операции аналитического продолжения к числу допустимых операций над аналитическими ростками. Для функции одной переменной удается получить топологические ограничения даже и при таком, расширенном, понимании операций над многозначными аналитическими функциями.

Ниже при рассмотрении топологических препятствий к принадлежности функции одной переменной тому или иному классу мы будем иметь в виду глобальный вариант определения класса функций с помощью списков основных функций и допустимых операций.

Для функций многих переменных в столь расширенной формулировке это сделать не удается, и приходится принять более ограничительную формулировку (см. п. 1.1 главы 7), связанную с ростками функций, которая, впрочем, не менее (а может быть, даже более) естественна. Единственное место в книге, где мы используем эту более ограничительную формулировку, — глава 7, в которой идет речь о функциях многих переменных.

2.2. Лиувиллевские классы функций одной переменной. В этом пункте определяются лиувиллевские классы функций одной переменной (для многих переменных определения приведены в § 1 главы 7). Мы будем задавать эти классы при помощи списков основных функций и допустимых операций.

Функции одной переменной, представимые в радикалах.

Список основных функций: все комплексные константы, независимая переменная x.

Список допустимых операций: арифметические операции и операции извлечения корня $\sqrt[n]{f}$ степени n, $n = 2, 3, \ldots$, из заданной функции f.

Функция $g(x) = \sqrt[3]{5x + 2\sqrt[2]{x}} + \sqrt[7]{x^3 + 3}$ доставляет пример функции, представимой в радикалах.

С этим классом связана знаменитая задача о разрешимости уравнений в радикалах. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$y^n + r_1 y^{n-1} + \ldots + r_n = 0,$$

в котором r_i — рациональные функции одной переменной. Полный ответ на вопрос о разрешимости таких уравнения в радикалах дает теория Галуа (см. главу 2).

Для определения остальных классов нам понадобится список *основных элементарных функций*. В этот список, в сущности, входят те функции, которые мы проходили в школе и которые часто вносят в клавиатуры калькуляторов.

Список основных элементарных функций:

1. Все комплексные константы и независимая переменная x.

2. Экспонента, логарифм и степенная функция x^α, где α — любая комплексная константа.

3. Тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс, котангенс.

4. Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс.

Перейдем теперь к списку *классических операций* над функциями. Здесь приводится начало списка. Он будет продолжен в § 1 главы 1.

Список классических операций:

1. *Операция суперпозиции*, сопоставляющая функциям f, g функцию $f \circ g$.

2. *Арифметические операции*, сопоставляющие функциям f и g функции $f+g$, $f-g$, fg и f/g.

3. *Операция дифференцирования*, сопоставляющая функции f функцию f'.

4. *Операция интегрирования*, сопоставляющая функции f ее неопределенный интеграл y (т. е. любую функцию y, такую что $y'=f$; по функции f функция y определена с точностью до аддитивной постоянной).

5. *Операция решения алгебраического уравнения*, сопоставляющая функциям $f_1, \ldots, f_n$ функцию y, такую что $y^n + f_1 y^{n-1} + \ldots + f_n = 0$ (по функциям $f_1, \ldots, f_n$ функция y определена не вполне однозначно, так как алгебраическое уравнение степени n может иметь n решений).

Вернемся теперь к определению лиувиллевских классов функций одной переменной.

Элементарные функции одной переменной.

Список основных функций: основные элементарные функции.

Список допустимых операций: суперпозиции, арифметические операции, дифференцирование.

Элементарные функции записываются формулами, например следующей:

$$f(x) = \operatorname{arctg}(\exp(\sin x) + \cos x).$$

Функции одной переменной, представимые в квадратурах.

Список основных функций: основные элементарные функции.

Список допустимых операций: суперпозиции, арифметические операции, дифференцирование, интегрирование.

Например, эллиптический интеграл

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}},$$

где P — кубический полином, представим в квадратурах. Но, как доказал Лиувилль, если полином P не имеет кратных корней, то функция f не является элементарной.

Обобщенные элементарные функции одной переменной. Этот класс функций определяется в точности так же, как класс элементарных функций. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений.

Функции одной переменной, представимые в обобщенных квадратурах. Этот класс функций определяется в точности так же, как класс функций, представимых в квадратурах. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений.

Определим еще два класса функций, близких к лиувиллевским классам.

Функции одной переменной, представимые в *k*-радикалах. Этот класс функций определяется в точности так же, как класс функций, представимых в радикалах. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений степени не выше k.

Функции одной переменной, представимые в *k*-квадратурах. Этот класс функций определяется в точности так же, как класс функций, представимых в квадратурах. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений степени не выше k.

Глава 1

ПОСТРОЕНИЕ ЛИУВИЛЛЕВСКИХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ И ТЕОРИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Первые доказательства неразрешимости некоторых уравнений в квадратурах и в элементарных функциях были получены в первой половине девятнадцатого века Ж. Лиувиллем (см. [25]–[27], [29]). Позднее П. Л. Чебышёв, Д. Д. Мордухай-Болтовский, А. Островский, Дж. Ритт, Дж. Давенпорт, М. Розенлихт, М. Зингер и многие другие развили результаты Лиувилля. Библиографию по этому вопросу можно найти в [32].

Согласно теории Лиувилля «достаточно простые» уравнения либо имеют «достаточно простые» решения, либо вообще не решаются в явном виде. В некоторых случаях результаты доведены до алгоритмов, которые либо позволяют доказать неразрешимость уравнения в конечном виде, либо предъявляют его явное решение.

Теория Лиувилля даёт ответ, например, на следующие вопросы:

1) при каких условиях неопределенный интеграл от элементарной функции является элементарной функцией?

2) при каких условиях представимы в обобщенных квадратурах все решения линейного дифференциального уравнения, коэффициенты которого — рациональные функции?

Чтобы продемонстрировать метод Лиувилля, мы приводим доказательство его теоремы об интегралах (см. § 3) и рассматриваем несколько применений этой теоремы. Пусть $\alpha = R(z, u)\,dz$ — 1-форма, в которой R — рациональная функция двух переменных, z — комплексная переменная и u — функция от z. В § 4 рассмотрен случай, когда u — логарифм рациональной функции f переменной z, $u = \ln f(z)$. Приведена процедура, позволяющая либо найти неопределенный интеграл формы α, либо доказать, что он не является обобщенной элементарной функцией. В § 5 описан аналогичный результат в случае, когда u — экспонента рациональной функции f переменной z, $u = \exp f(z)$. Случай абелевой 1-формы α, в котором u — алгебраическая функция переменной z, рассмотрен в § 6. Описаны необходимые и достаточные условия элементарности абелева интеграла. Выполнимость этих условий трудно проверить.

В этом смысле алгебраический случай сложнее, чем логарифмический и экспоненциальный. Параграфы 3–6 можно пропустить без ущерба для понимания остального материала книги. Чтобы избежать ссылок на эти параграфы, в третьей главе мы повторяем простые и короткие вычисления, связанные с присоединением к дифференциальному полю интеграла, экспоненты интеграла и корня алгебраического уравнения.

В § 1 приводятся принадлежащие Лиувиллю значительно более простые определения лиувиллевских классов функций (например, класса элементарных функций). Объясняется, как именно удалось Лиувиллю алгебраизировать вопросы о разрешимости уравнений в элементарных функциях и в других лиувиллевских классах функций. В § 2 приводится конструкция расширений Лиувилля функциональных дифференциальных полей.

В § 7 мы формулируем некоторые результаты теории Лиувилля, относящиеся к вопросу разрешимости линейных дифференциальных уравнений. Более полно на этот вопрос отвечает дифференциальная теория Галуа (см. главу 3).

§ 1. Новые определения лиувиллевских классов функций

Лиувилль алгебраизировал задачу о разрешимости в элементарных функциях и квадратурах. Главным препятствием на этом пути является абсолютно неалгебраическая операция суперпозиции. Лиувилль обошел это препятствие следующим образом: с каждой функцией g из списка основных функций он связал операцию суперпозиции с этой функцией, переводящую функцию f, к которой применяется эта операция, в функцию $g \circ f$. Лиувилль заметил, что все основные элементарные функции сводятся к логарифму и к экспоненте (см. лемму 1.1 ниже). Суперпозиции $y = \exp f$ и $z = \ln f$ можно рассматривать как решения уравнений $y' = f'y$ и $z' = f'/f$. Таким образом, внутри лиувиллевских классов функций вместо абсолютно неалгебраической операции суперпозиции достаточно рассматривать операции решения простых дифференциальных уравнений. После этого задача о разрешимости в лиувиллевских классах функций становится дифференциально-алгебраической и переносится на абстрактные дифференциальные поля.

Приступим к реализации этой программы.

Продолжим список классических операций (начало списка в п. 2.2 введения):

6. *Операция взятия экспоненты*, сопоставляющая функции f функцию $\exp f$.

7. *Операция взятия логарифма*, сопоставляющая функции f функцию $\ln f$.

Приведем теперь новые определения трансцендентных лиувиллевских классов функций.

Элементарные функции одной переменной.

Список основных функций: все комплексные константы и независимая переменная x.

Список допустимых операций: взятие экспоненты, взятие логарифма, арифметические операции, дифференцирование.

Функции одной переменной, представимые в квадратурах.

Список основных функций: все комплексные константы.

Список допустимых операций: взятие экспоненты, арифметические операции, дифференцирование, интегрирование.

Обобщенные элементарные функции одной переменной и функции одной переменной, представимые в обобщенных квадратурах и *k*-квадратурах, определяются так же, как соответствующие необобщенные классы функций, нужно лишь к списку допустимых операций добавить, соответственно, операцию решения алгебраических уравнений или операцию решения алгебраических уравнений степени не выше k.

Лемма 1.1. *Основные элементарные функции выражаются с помощью комплексных констант, арифметических операций и суперпозиций через экспоненту и логарифм.*

Доказательство. Для степенной функции x^α нужное выражение доставляет равенство $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

Для тригонометрических функций нужные выражения вытекают из формулы Эйлера $e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$. При вещественных значениях x имеем $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ и $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$. В силу аналитичности эти же формулы справедливы и для комплексных значений x. Функции тангенс и котангенс выражаются через синус и косинус. Покажем, что для вещественных значений x справедливо равенство $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \ln z$, где $z = \frac{1+ix}{1-ix}$. Очевидно, что $|z| = 1$,

$\arg z = 2\arg(1+ix)$, $\operatorname{tg}(\arg(1+ix)) = x$, что и доказывает нужное равенство. В силу аналитичности это же равенство справедливо и для комплексных значений x. Остальные обратные тригонометрические функции выражаются через арктангенс. Именно, $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. Квадратный корень, участвующий в выражении функции arcsin, выражается через экспоненту и логарифм: $x^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln x\right)$. Лемма доказана. □

Теорема 1.2. *Для каждого из трансцендентных лиувиллевских классов функций новое и старое определения* (см. настоящий параграф и п. 2.2 введения) *эквивалентны.*

Доказательство. В одну сторону теорема очевидна: ясно, что любая функция, принадлежащая некоторому лиувиллевскому классу, понимаемому в смысле нового определения, принадлежит тому же классу, понимаемому в смысле старого определения.

Докажем теорему в другую сторону. Согласно лемме 1.1 основные элементарные функции лежат в классах элементарных и обобщенных элементарных функций, понимаемых в смысле нового определения. Из этой же леммы вытекает, что классы функций, представимых в квадратурах, обобщенных квадратурах и k-квадратурах, понимаемые в смысле нового определения, тоже содержат основные элементарные функции. Действительно, независимая переменная x принадлежит этим классам, так как она получается интегрированием константы 1, ибо $x' = 1$. Вместо операции взятия логарифма, которой нет среди допустимых операций в этих классах, можно использовать операцию интегрирования, так как $(\ln f)' = f'/f$.

Нам осталось показать, что лиувиллевские классы функций, понимаемые в смысле нового определения, замкнуты относительно суперпозиций. Дело здесь в следующем: операция взятия суперпозиции коммутирует со всеми операциями, фигурирующими в новых определениях классов функций, за исключением операций дифференцирования и интегрирования. Так, например, результат применения операции exp к суперпозиции $g \circ f$ совпадает с результатом применения операции взятия суперпозиции к функциям $\exp g$ и f, т. е. $\exp(g \circ f) = (\exp g) \circ f$. Аналогично $\ln(g \circ f) = (\ln g) \circ f$, $(g_1 \pm g_2) \circ f = (g_1 \circ f) \pm (g_2 \circ f)$, $(g_1 g_2) \circ f = (g_1 \circ f)(g_2 \circ f)$, $(g_1/g_2) \circ f = (g_1 \circ f)/(g_2 \circ f)$. Если функция y удовлетворяет уравнению $y^n +$

$+g_1y^{n-1}+\ldots+g_n=0$, то функция $(y\circ f)$ удовлетворяет уравнению $(y\circ f)^n+(g_1\circ f)(y\circ f)^{n-1}+\ldots+(g_n\circ f)=0$.

Для операций дифференцирования и интегрирования имеем следующие простые коммутационные соотношения с операцией суперпозиции: $(g)'\circ f=(g\circ f)'(f')^{-1}$ (если функция f — константа, то функция $(g)'\circ f$ тоже константа), и если y — неопределенный интеграл функции g, то $y\circ f$ — неопределенный интеграл функции $(g\circ f)f'$ (другими словами, интегрированию функции g при суперпозиции с функцией f соответствует интегрирование функции $g\circ f$, домноженной на функцию f').

Отсюда и вытекает замкнутость лиувиллевских классов, понимаемых в смысле нового определения, относительно суперпозиций. Действительно, если функция g получается из констант (или из констант и независимой переменной) при помощи операций, которые мы обсуждали выше, то функция $g\circ f$ получается применением тех же или почти тех же операций, как в случае интегрирования и дифференцирования, из функции f. Теорема доказана. □

Замечание. Легко видеть, что операцию дифференцирования тоже можно исключить из списков допустимых операций лиувиллевских классов функций. Для доказательства достаточно воспользоваться явным вычислением производных экспоненты и логарифма и правилами дифференцирования формул, включающих суперпозиции и арифметические операции. Исключение операции дифференцирования не помогает в задаче о разрешимости уравнений в конечном виде (иногда исключение дифференцирования дает возможность более инвариантно сформулировать результат, см. вторую формулировку теоремы Лиувилля об абелевых интегралах из § 6).

§ 2. Расширения Лиувилля абстрактных и функциональных дифференциальных полей

Поле K называется *дифференциальным полем*, если задано аддитивное отображение $a\to a'$, удовлетворяющее соотношению Лейбница $(ab)'=a'b+ab'$. Элемент y дифференциального поля K называется *константой*, если $y'=0$. Все константы дифференциального поля образуют подполе, которое называется *полем констант*. Во всех интересующих нас случаях полем констант является поле комплексных чисел. *Мы всегда в дальнейшем предполагаем, что дифференциальное поле имеет нулевую характеристику и алгебраически замкнутое поле констант*. Элемент y дифференциального поля называется *экспонентой* элемента a, если $y' = a'y$; *экспонентой интеграла* элемента a, если $y' = ay$; *логарифмом* элемента a, если $y' = a'/a$; *интегралом* элемента a, если $y' = a$.

Пусть дифференциальное поле K и множество M лежат в некотором дифференциальном поле F. *Присоединением* к дифференциальному полю K множества M называется минимальное дифференциальное поле $K\langle M\rangle$, содержащее поле K и множество M.

Дифференциальное поле F, содержащее дифференциальное поле K и имеющее то же поле констант, называется *элементарным расширением* поля K, если существует такая цепочка дифференциальных полей $K = F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_n = F$, что при каждом $i = 1, \ldots, n-1$ поле $F_{i+1} = F_i\langle x_i\rangle$ получается присоединением к полю F_i элемента x_i, причем x_i — экспонента или логарифм некоторого элемента a_i поля F_i. Элемент $a \in F$ называется *элементарным* над K, $K \subset F$, если он содержится в каком-либо элементарном расширении поля K.

Обобщенное элементарное расширение, расширение Лиувилля, обобщенное расширение Лиувилля и *k-расширение Лиувилля* поля K определяются аналогично. При построении обобщенных элементарных расширений допускаются присоединения экспонент, логарифмов и алгебраические расширения. При построении расширений Лиувилля допускаются присоединения интегралов и экспонент интегралов. В обобщенных расширениях Лиувилля и k-расширениях Лиувилля кроме этого допускаются, соответственно, алгебраические расширения и присоединения решений алгебраических уравнений степени не выше k. Элемент $a \in F$ называется *обобщенно-элементарным* над K, $K \subset F$ (*представимым в квадратурах, в обобщенных квадратурах, в k-квадратурах* над K), если a содержится в каком-либо обобщенном элементарном расширении (расширении Лиувилля, обобщенном расширении Лиувилля, k-расширении Лиувилля) поля K.

Замечание. Уравнение для экспоненты интеграла проще, чем уравнение для экспоненты. Поэтому при определении расширений Лиувилля и т. д. используются присоединения экспонент интегралов. Вместо этого можно было бы отдельно присоединять экспоненты и отдельно интегралы.

Перейдем к функциональным дифференциальным полям. Именно с такими полями мы будем иметь дело в книге (хотя некоторые результаты без труда переносятся на абстрактные дифференциальные поля).

Всякое подполе K поля всех мероморфных функций в связной области U на сфере Римана, содержащее все комплексные константы и замкнутое относительно дифференцирования (т. е. если $f \in K$, то $f' \in K$), доставляет пример функционального дифференциального поля. Дадим теперь общее определение. Пусть V, v — пара, состоящая из связной римановой поверхности V и мероморфного векторного поля v на ней. Производная Ли L_v вдоль векторного поля v действует на поле F всех мероморфных функций на поверхности V и задает дифференцирование $f' = L_v f$ в этом поле. *Функциональное дифференциальное поле* — это любое дифференциальное подполе поля F, содержащее все комплексные константы.

Иногда удобнее использовать другое определение дифференцирования поля функций, в котором вместо мероморфного векторного поля фигурирует мероморфная 1-форма α. Производную f' функции f можно определить следующей формулой: $f' = df/\alpha$ (частное двух мероморфных 1-форм является корректно определенной мероморфной функцией). Описанное дифференцирование — это производная Ли L_v вдоль векторного поля v, связанного с формой α следующим соотношением: значение формы α на поле v тождественно равно единице.

Для *расширения функциональных полей* полезна следующая конструкция. Пусть K — некоторое подполе поля мероморфных функций на связной римановой поверхности V, снабженной мероморфной формой α, инвариантное относительно дифференцирования $f' = df/\alpha$ (т. е. если $f \in K$, то $f' \in K$). Рассмотрим любую связную риманову поверхность W вместе с аналитическим отображением $\pi\colon W \to V$. Фиксируем на W форму $\beta = \pi^*\alpha$. Дифференциальное поле F всех мероморфных функций на W с дифференцированием $\varphi' = d\varphi/\beta$ содержит дифференциальное подполе π^*K, состоящее из функций вида π^*f, где $f \in K$. Дифференциальное поле π^*K изоморфно дифференциальному полю K, и оно лежит внутри дифференциального поля F. Если удачно подобрать поверхность W, то расширение поля π^*K, изоморфного полю K, можно произвести внутри поля F.

Пусть требуется расширить поле K, скажем, интегралом y некоторой функции $f \in K$. Это можно сделать следующим образом. Над римановой поверхностью V можно рассмотреть риманову поверхность W неопределенного интеграла y формы $f\alpha$. По самому определению римановой поверхности W существует естественная проекция $\pi: W \to V$, и функция y является однозначной мероморфной функцией на поверхности W. Дифференциальное поле F мероморфных функций на W с операцией дифференцирования $f' = df/\pi^*\alpha$ содержит как элемент y, так и поле π^*K, изоморфное полю K. Поэтому расширение $\pi^*K\langle y\rangle$ определено и является подполем дифференциального поля F. Именно эту конструкцию расширения мы имеем в виду, когда говорим о расширениях функциональных дифференциальных полей. Эта же конструкция позволяет присоединить к функциональному дифференциальному полю K логарифм, экспоненту, интеграл или экспоненту интеграла от любой функции f из поля K. Для любых функций $f_1, \ldots, f_n \in K$ можно таким способом присоединить к K решение y алгебраического уравнения $y^n + f_1 y^{n-1} + \ldots + f_n = 0$ или все решения $y_1, \ldots, y_n$ этого уравнения (присоединение всех решений $y_1, \ldots, y_n$ можно осуществить на римановой поверхности вектор-функции $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$). Таким же способом для любых функций $f_1, \ldots, f_{n+1} \in K$ можно присоединить к K n-мерное аффинное пространство над $\mathbb{C}$ всех решений линейного дифференциального уравнения $y^{(n)} + f_1 y^{(n-1)} + \ldots + f_n y + f_{n+1} = 0$. (Напомним, что росток любого решения линейного дифференциального уравнения аналитически продолжается вдоль кривой на поверхности V, не проходящей через полюсы функций $f_1, \ldots, f_{n+1}$.)

Итак, *все упомянутые выше расширения функциональных дифференциальных полей можно осуществить, не выходя из класса функциональных дифференциальных полей*. Говоря о расширениях функциональных дифференциальных полей, мы всегда имеем в виду именно эту процедуру.

Дифференциальное поле, состоящее из всех комплексных констант, и дифференциальное поле, состоящее из всех рациональных функций от одной переменной, можно рассматривать как дифференциальные поля функций, определенных на сфере Римана.

Сформулируем снова теорему 1.2, используя определения из абстрактной дифференциальной алгебры и конструкцию расширения функциональных дифференциальных полей.

Теорема 2.1. *Функция одной комплексной переменной (возможно, многозначная) принадлежит*

1) *классу элементарных функций, если и только если она принадлежит некоторому элементарному расширению поля всех рациональных функций одной переменной;*

2) *классу обобщенных элементарных функций, если и только если она принадлежит некоторому обобщенному элементарному расширению поля рациональных функций;*

3) *классу функций, представимых в квадратурах, если и только если она принадлежит некоторому расширению Лиувилля поля всех комплексных констант;*

4) *классу функций, представимых в k-квадратурах, если и только если она принадлежит некоторому k-расширению Лиувилля поля всех комплексных констант;*

5) *классу функций, представимых в обобщенных квадратурах, если и только если она принадлежит обобщенному расширению Лиувилля поля всех комплексных констант.*

§ 3. Интегрирование элементарных функций

Элементарные функции дифференцировать легко, но интегрировать их трудно. Как доказал Лиувилль, неопределенный интеграл от элементарной функции обычно не является элементарной функцией.

Теорема 3.1 (Лиувилля об интегралах). *Неопределенный интеграл y функции f, лежащей в функциональном дифференциальном поле K, принадлежит некоторому обобщенному элементарному расширению этого поля, если и только если этот интеграл представим в виде*

$$y(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)\,dt = A_0(z) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln A_i(z), \tag{1}$$

где A_i при $i = 0, \ldots, n$ — некоторые функции из поля K.

Следствие 3.2. *Неопределенный интеграл y от обобщенной элементарной функции f является обобщенной элементарной функцией, если и только если он представим в виде*

$$y(z) = A_0(z) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln A_i(z),$$

где A_i при $i=0, \ldots, n$ — рациональные функции с комплексными коэффициентами от функции f и ее производных.

Априори интеграл от элементарной функции f мог бы быть очень сложной элементарной функцией. Теорема Лиувилля показывает, что ничего такого случиться не может. Или интеграл от элементарной функции неэлементарен, или он имеет описанный в следствии простой вид.

Теорема Лиувилля — яркий результат о разрешимости и о неразрешимости уравнений в явном виде, не связанный с теорией групп. В § 3 мы приведем полное доказательство этой теоремы.

Условие (1) из теоремы Лиувилля в дифференциальной форме означает, что элемент $f \in K$ представим в виде

$$f = A_0' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{A_i'}{A_i}, \tag{2}$$

где A_i при $i=0, \ldots, n$ — некоторые элементы поля K. В абстрактной дифференциальной алгебре справедлив аналог теоремы Лиувилля. В формулировке абстрактной теоремы в качестве K нужно взять абстрактное дифференциальное поле и воспользоваться условием (1) в дифференциальной форме (2).

Рассуждения Лиувилля (см. [29]) были значительно упрощены в работах [30], [31] (см. также [28]). Доказательство с небольшими изменениями проходит для абстрактных дифференциальных полей. Правда, так как абстрактные дифференциальные поля для нас неинтересны, мы не обсуждаем существование нужных нам по ходу дела расширений полей (скажем, существование дифференциального поля, содержащего интеграл некоторого элемента заданного дифференциального поля). Для функциональных дифференциальных полей вопросы такого рода очевидны и уже рассмотрены выше (см. § 2).

Для многих элементарных дифференциальных форм теорема Лиувилля позволят либо найти интеграл, либо доказать, что интеграл не является обобщенной элементарной функцией. Рассмотрим, например, форму $\alpha = R(z, u)\,dz$, где R — рациональная функция двух переменных, а u — функция переменной z. Вопрос об элементарности интеграла формы α в случае, когда $u = \ln f$, где f — рациональная функция переменной z, разобран в § 4. Случай, когда $u = \exp f$, где f — рациональная функция переменной z, разобран в § 5.

Берется ли интеграл от алгебраической функции в явном виде? Пионерские работы Абеля, заложившие основы теории алгебраических кривых и абелевых интегралов, были посвящены этому вопросу для специального класса алгебраических функций. Использование теории алгебраических кривых и топологии позволяет довольно полно объяснить причины неэлементарности абелевых интегралов (см. § 6). Правда, проверка выполнения необходимых и достаточных условий элементарности абелевых интегралов из § 6 сама является непростой задачей (ср. [17]), которую в этой книге мы не рассматриваем.

Скажем несколько слов о терминологии. Начиная с четвертого пункта в § 3 до конца § 5 термин «рациональная» функция используется в различных смыслах. Чтобы избежать недоразумений, сделаем необходимые пояснения. Мы будем иметь дело с полем F, порожденным над полем K одним элементом t, трансцендентным над полем K. Поле F естественно отождествляется с полем $K\langle x\rangle$ рациональных функций над полем K: каждый элемент $g\in F$ является значением единственной рациональной функции $G\in K\langle x\rangle$ на элементе t. Мы будем отождествлять элемент $g\in F$ как с функцией G, так и с ее значением $G(t)$ на элементе t. Мы будем говорить об элементах поля F как о рациональных функциях, будем раскладывать эти функции в правильные дроби и т. д. Операция дифференцирования на поле F индуцирует операцию дифференцирования $G\to DG$ на рациональных функциях. Операция D зависит от уравнения, которому удовлетворяет элемент t: она имеет вид $DG=(a'/a)G'$, если t — логарифм элемента $a\in K$, и вид $DG(t)=a'tG'(t)$, если t — экспонента элемента $a\in K$. В § 4 и 5 встречается также поле K рациональных функций комплексной переменной. Чтобы избежать недоразумений, говоря об элементах этого поля, мы будем подчеркивать, что это рациональные функции *комплексной переменной* z, и будем обозначать это поле K символом $\mathbb{C}\langle z\rangle$.

3.1. План доказательства теоремы Лиувилля. Нам надо доказать, что *если производная обобщенной элементарной функции y над полем K лежит в поле K, т. е. если $y'\in K$, то функция y представима в виде* (1). Введем для обобщенных элементарных функций над функциональным дифференциальным полем K понятие сложности. Скажем, что функция y является *обобщенной элементарной функци-*

ей сложности не выше k над K, если существует последовательность $K=F_0\subset F_1\subset\ldots\subset F_k$ функциональных дифференциальных полей F_i, в которой при $i=1,\ldots,k$ поле F_i является расширением поля F_{i-1} при помощи добавления экспоненты, логарифма или алгебраической функции над полем F_{i-1}.

Теорема 3.1 доказывается по индукции. Индукционное утверждение $I(m)$: *теорема Лиувилля верна для любого обобщенно-элементарного интеграла y сложности не выше m над любым функциональным дифференциальным полем K*. Утверждение $I(0)$ очевидно: если интеграл y лежит в поле K, то он представим в виде (1): $y=A_0$, где $A_0\in K$.

Пусть y — обобщенно-элементарный интеграл над K сложности не выше k, т. е. $y'\in K$, $y\in F_k$ и $K=F_0\subset F_1\subset\ldots\subset F_k$ — последовательность полей, в которой каждое поле F_i получается из предыдущего поля F_{i-1} при помощи добавления экспоненты, логарифма или алгебраической функции над полем F_{i-1}. Так как $y'\in F_1$, то по индукционному утверждению $I(k-1)$ можно считать, что

$$y=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i\ln R_i+R_0, \tag{3}$$

где $R_1,\ldots,R_q,R_0\in F_1$.

Поле F_1 получено из поля K присоединением или алгебраического элемента, или логарифма, или экспоненты над полем K. Эти три случая ниже рассматриваются отдельно (см. п. 3.6). Мы покажем, что если F_1 — алгебраическое расширение поля K, то элемент y представляется через элементы поля K формулой, аналогичной (3) и содержащей то же число q логарифмических слагаемых. Если F_1 получено из K при помощи логарифмического расширения, то функция R_0 могла бы содержать аддитивный логарифмический член, однако функции $R_1,\ldots,R_q$ логарифма содержать не могут. Поэтому представление y через элементы поля K имеет вид, аналогичный (3), но может содержать $q+1$ логарифмическое слагаемое. Если же поле F_1 получено из K при помощи экспоненциального расширения, то экспонента не может входить в функцию R_0 и могла бы входить в функции R_i при $i>0$ только в качестве сомножителя. Поэтому после логарифмирования экспонента пропадает и соответствующие сомножители становятся слагаемыми, которые прибавляются к R_0.

Мы приступим к реализации этого индукционного доказательства в п. 3.6. До этого мы уточним формулировку теоремы Лиувилля (п. 3.2) и обсудим общие свойства расширений дифференциального поля степеней трансцендентности нуль (п. 3.3) и один (п. 3.4), среди которых выделяются присоединения интеграла и экспоненты интеграла (п. 3.5).

3.2. Уточнение теоремы Лиувилля. Докажем, что *в формулировке теоремы Лиувилля можно добавить требование линейной независимости коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ над полем рациональных чисел* (см. «торическую» лемму 3.4 ниже). Начнем с очевидной леммы 3.3.

Лемма 3.3. *Если $g = f_1^{k_1} \ldots f_n^{k_n}$, где k_i — целые числа и $f_1, \ldots, f_n$ — ненулевые элементы некоторого дифференциального поля, то $\frac{g'}{g} = \sum k_i \frac{f_i'}{f_i}$.*

Доказательство вытекает из тождества Лейбница (или из равенства логарифма произведения сумме логарифмов сомножителей). □

Рассмотрим набор $A_1, \ldots, A_n$ ненулевых элементов дифференциального поля K и линейную комбинацию $S = \lambda_1 \frac{A_1'}{A_1} + \ldots + \lambda_n \frac{A_n'}{A_n}$ их логарифмических производных с постоянными коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Лемма 3.4. *Если числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ зависимы над полем $\mathbb{Q}$, то в мультипликативной группе G, порожденной элементами $A_1, \ldots, A_n$, можно выбрать меньше чем n элементов, некоторая линейная комбинация с постоянными коэффициентами логарифмических производных которых равна S.*

Доказательство. Можно считать, что ни один из элементов A_i не равен константе: в противном случае $\frac{A_i'}{A_i} = 0$ и число слагаемых в S можно сократить. Можно считать, что группа G свободна и не содержит констант, отличных от единицы. Действительно, нетривиальное тождество $A_1^{k_1} \ldots A_n^{k_n} = c$, где c — константа, по лемме 3.3 влечет за собой нетривиальное линейное соотношение $\sum k_i \frac{A_i'}{A_i} = 0$, которое позволяет сократить число слагаемых в S. Если группа G свободна, то в ней можно выбрать такие новые образующие $B_1, \ldots, B_n$, что $A_1 = B_1^{m_{1,1}} \ldots B_n^{m_{1,n}}, \ldots, A_n = B_1^{m_{n,1}} \ldots B_n^{m_{n,n}}$, где $M = \{m_{i,j}\}$ —

произвольная целочисленная $(n\times n)$-матрица с определителем 1. По лемме 3.3 имеем $\frac{A_i'}{A_i}=m_{i,1}\frac{B_1'}{B_1}+\ldots+m_{i,n}\frac{B_n'}{B_n}$. Поэтому S является линейной комбинацией логарифмических производных элементов B_i. Логарифмическая производная функции B_1 входит в эту комбинацию с коэффициентом $\lambda_1 m_{1,1}+\ldots+\lambda_n m_{n,1}$. Пусть $p_1\lambda_1+\ldots+p_n\lambda_n=0$ — соотношение между коэффициентами $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, где $p_1,\ldots,p_n$ — целые числа, не имеющие общего делителя. Выберем целочисленную матрицу M с единичным определителем так, чтобы выполнялись равенства $m_{1,1}=p_1$, ..., $m_{n,1}=p_n$. Это можно сделать, так как несократимый целочисленный вектор $p=(p_1,\ldots,p_n)$ можно дополнить до базиса решетки $\mathbb{Z}^n$. Такому выбору матрицы соответствует некоторый набор образующих $B_1,\ldots,B_n$. Элемент S является линейной комбинацией логарифмических производных элементов $B_2,\ldots,B_n$. Лемма доказана. □

Мы показали, что из теоремы Лиувилля вытекает ее уточнение, сформулированное в начале этого пункта.

3.3. Алгебраические расширения дифференциальных полей. Пусть $K\subset F$ — функциональные дифференциальные поля и $P\in K[x]$ — неприводимый полином степени n над полем K. Пусть поле F содержит все n корней $x_1,\ldots,x_n$ полинома P. При $i=1,\ldots,n$ обозначим через K_i поле, полученное алгебраическим присоединением к полю K корня x_i. Поля K_i изоморфны друг другу: для каждого $i=1,\ldots,n$ поле K_i изоморфно фактору $K[x]/(P)$ кольца полиномов $K[x]$ по идеалу (P), порожденному полиномом P.

Лемма 3.5. *Для каждого $i=1,\ldots,n$ поле K_i замкнуто относительно дифференцирования. Для каждой пары индексов $1\leqslant i,j\leqslant n$ отображение, оставляющее поле K неподвижным и переводящее элемент x_i в x_j, продолжается до дифференциального изоморфизма полей K_i и K_j.*

Доказательство. Для полинома $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ над полем K обозначим через $\frac{\partial P}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial t}$ соответственно полиномы $nx^{n-1}+ +\ldots+a_{n-1}$ и $a_1'x^{n-1}+\ldots+a_n'$. Так как полином P неприводим над K, то полином $\frac{\partial P}{\partial x}$ не имеет общих корней с полиномом P и не равен нулю в поле $K[x]/(P)$. Обозначим через M полином степени меньше n, для которого выполняется сравнение $M\frac{\partial P}{\partial x}\equiv-\frac{\partial P}{\partial t} \mod P$.

Для каждого корня x_i, продифференцировав в поле F тождество $P(x_i)=0$, получаем равенство $\frac{\partial P}{\partial x}(x_i)x_i' + \frac{\partial P}{\partial t}(x_i)=0$, откуда следует, что $x_i' = M(x_i)$. Итак, производная элемента x_i является значением в точке x_i полинома M, не зависящего от выбора корня x_i. Отсюда вытекают оба утверждения леммы. □

3.4. Расширения степени трансцедентности один. В этом пункте приводятся простые вычисления, на которых основаны доказательство теоремы Лиувилля (п. 3.6) и критерии элементарности логарифмических (§ 4) и экспоненциальных интегралов (§ 5).

Пусть $K \subset F$ — пара вложенных дифференциальных полей, где поле F как поле (а не как дифференциальное поле!) порождено над K одним элементом $t \in F$ и элемент t трансцендентен над полем K. В этом случае поле F можно рассматривать как снабженное новой операцией дифференцирования поле рациональных функций над полем K. Действительно, каждый элемент поля F представляется как значение на элементе $x=t$ единственной рациональной функции $G(x)$ над полем K: две различные рациональные функции не могут совпадать на элементе t, так как он трансцендентен над K. В частности, производная t' элемента t равняется $G(t)$, где G — рациональная функция над полем K. В этой ситуации дифференциальное поле F изоморфно полю рациональных функций над полем K с новой операцией дифференцирования D, определенной формулой $D\varphi = G\varphi'$, где φ' — обычная операция дифференцирования в поле рациональных функций над дифференциальным полем K.

Ниже мы ограничиваемся случаем, когда функция G, определяющая операцию дифференцирования, является полиномом P над полем K. Мы отождествляем поле F с полем рациональных функций над полем K, снабженных дифференцированием $D\varphi = P\varphi'$. Это дифференцирование переводит кольцо полиномов над полем K в себя.

Рациональная функция над любым полем K допускает мультипликативное и аддитивное представления. Напомним свойства этих представлений.

а. Мультипликативное представление. Каждую рациональную функцию R можно представить в виде произведения

$$R = AP_1^{k_1} \dots P_l^{k_l},$$

где P_j — неприводимый над K полином со старшим коэффициентом, равным единице, k_j — целое число и A — элемент поля K. Такое представление единственно с точностью до перестановки сомножителей.

б. Аддитивное представление. Каждую рациональную функцию R можно разложить в правильную дробь, т. е. представить в виде суммы

$$R = Q + \sum_{j,m} \frac{Q_{m,j}}{L_j^m},$$

где Q — полином, L_j — неприводимый над K полином со старшим коэффициентом, равным единице, $Q_{m,j}$ — полином, степень которого меньше степени полинома L_j. Такое представление единственно с точностью до перестановки слагаемых. Полином Q будем называть *полиномиальной составляющей* функции R. Разность $R - Q$ будем называть *полярной составляющей* функции R, сумму $\sum\limits_m \frac{Q_{m,j}}{L_j^m}$ будем называть *L_j-полярной составляющей* функции R, член $\frac{Q_{m,j}}{L_j^m}$ в L_j-полярной составляющей, соответствующий максимальной степени m знаменателя, будем называть *старшим членом* L_j-полярной составляющей, а число m будем называть *порядком* L_j-полярной составляющей.

Следующие два утверждения очевидны.

Утверждение 3.6. *Пусть полиномы L_j и DL_j взаимно просты. Тогда для всякой рациональной функции L_j-полярная составляющая ее производной зависит лишь от L_j-полярной составляющей функции: если $\frac{Q_m}{L_j^m}$ — старший член L_j-полярной составляющей функции R и Q — остаток от деления полинома $(-m)Q_m DL_j$ на полином L_j, то $\frac{Q}{L_j^{m+1}}$ — старший член L_j-полярной составляющей производной DR.*

Утверждение 3.7. *Пусть P_k — неприводимые полиномы с единичными старшими коэффициентами и μ_k — комплексные числа. Тогда полярная составляющая функции $\sum\limits_{k=1}^{p} \mu_k \frac{DP_k}{P_k}$ равна $\sum\limits_{k=1}^{p} \mu_k \frac{Q_k}{P_k}$, где Q_k — остаток при делении полинома DP_k на полином P_k* (если полиномы DP_k и P_k имеют общий множитель, то остаток Q_k равен нулю и его не нужно учитывать в написанной сумме).

Скажем, что у элемента $g \in F$, рассматриваемого как значение рациональной функции G над полем K на элементе t, существует *представление Лиувилля*, если функция G представима в виде

$$G = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \frac{DR_i}{R_i} + DR_0.$$

В этом представлении каждую из рациональных функций R_i при $i = 1, \dots, q$ запишем в мультипликативном виде $R_i = A_i P_{i_1}^{k_{i_1}} \dots P_{i_l}^{k_{i_l}}$, где P_{i_j} — неприводимые над K полиномы со старшим коэффициентом, равным единице, k_{i_j} — целые числа и A_i — элемент поля K. Воспользовавшись леммой 3.3, линейную комбинацию $\sum\limits_{i=1}^{q} \lambda_i \frac{DR_i}{R_i}$ логарифмических производных функций R_i представим в виде суммы линейных комбинаций $\sum\limits_{i=1}^{q} \lambda_i \frac{A_i'}{A_i}$ логарифмических производных элементов A_i поля K и линейных комбинаций $\sum\limits_{k=1}^{p} \mu_k \frac{DP_k}{P_k}$ логарифмических производных полиномов P_k. Итак, функция G, допускающая представление Лиувилля, записывается в следующем виде:

$$G = \sum \lambda_i \frac{A_i'}{A_i} + \sum \mu_k \frac{DP_k}{P_k} + DR_0.$$

Наша ближайшая цель — выяснить, как связаны L_j-полярные составляющие функции G и функций R_0 и $\frac{DP_k}{P_k}$. Приведем вычисления для L_j-полярных составляющих в случае, когда полиномы L_j и DL_j взаимно просты. В этом случае из утверждений 3.6, 3.7 вытекает, что если L_j-полярная составляющая функции R_0 не равна нулю, то порядок L_j-полярной составляющей ее производной DR_0 больше единицы, в то время как порядок L_j-полярной составляющей логарифмической производной $\frac{DL_j}{L_j}$ равен единице. Пользуясь этим замечанием, из утверждений 3.6, 3.7 легко вывести такие следствия.

Следствие 3.8. *Пусть полиномы L_j и DL_j взаимно просты. Тогда L_j-полярная составляющая функции G имеет порядок, больший единицы, если и только если L_j-полярная составляющая функции R_0 не равна нулю. В этом случае старший член L_j-полярной составляющей функции G равен старшему члену L_j-полярной составляющей функции DR_0.*

Следствие 3.9. *Пусть полиномы L_j и DL_j взаимно просты. Тогда L_j-полярная составляющая функции G имеет порядок, равный единице, если и только если L_j-полярная составляющая функции R_0*

равна нулю, а в линейной комбинации логарифмических производных есть слагаемое $\mu_k \frac{DP_k}{P_k}$, *в котором* $P_k = L_j$ *и* $\mu_k \neq 0$. *В этом случае старший член* L_j*-полярной составляющей функции* G *равен старшему члену* L_j*-полярной составляющей функции* $\mu_k \frac{DL_j}{L_j}$.

3.5. Присоединение интеграла и экспоненты интеграла. В этом пункте мы продолжим вычисления, начатые в п. 3.4, для случая, когда поле F получается присоединением к полю K интеграла над полем K и экспоненты интеграла над полем K.

Лемма 3.10. *Пусть* $t \in F$ — *трансцендентный элемент над полем* K *и* $L \in K[x]$ — *неприводимый полином над полем* K. *Тогда*

1) *если* t — *интеграл над полем* K, *т. е.* $t' = f$, $f \in K$, *то полиномы* DL *и* L *не имеют общего множителя*;

2) *если* t — *экспонента интеграла над полем* K, *т. е.* $t' = ft$, $f \in K$, *то полиномы* DL *и* L *имеют общий множитель, если и только если* $L \equiv x$.

Доказательство. Прежде всего, наличие или отсутствие общего множителя у полиномов L и DL не зависит от умножения полинома L на элемент $a \in K$, $a \neq 0$. Это видно из тождества Лейбница $D(aL) = a'L + aD(L)$. Если t — интеграл над K, $t' = f$, то, домножив, если надо, полином L на элемент поля K, можно считать, что старший коэффициент полинома L равен единице, $L(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$. В этом случае полином $DL = (nf + a_1)x^{n-1} + \ldots$ имеет меньшую степень, чем полином L, и никак не может делиться на неприводимый полином L.

Если t — экспонента интеграла над K, $t' = ft$, и неприводимый полином L не совпадает с полиномом $L \equiv x$, то домножив L, если надо, на элемент поля K, можно считать, что свободный член полинома L равен единице, $L(x) = a_n x^n + \ldots + 1$ (неприводимый полином имеет нулевой свободный член, только если $L \equiv x$). В этом случае полином $DL = (a_n' + n a_n f)x^n + \ldots$ имеет ту же степень, что и полином L, но свободный член полинома DL равен нулю. Поэтому он не может делиться на полином L. □

Замечание. Используя теорему Ролля и вычисления из леммы 3.10, легко показать, что каждая *вещественная функция Лиувилля* (см. [49]) *имеет лишь конечное число вещественных корней, причем это число корней можно явно оценить сверху* (в частности, функция sin не является вещественной функцией Лиувилля). Теория малочленов (см. [50]) содержит далекие многомерные обобщения оценок такого рода.

Лемма 3.11. *Пусть $t \in F$ — трансцендентный элемент над полем K, являющийся интегралом над K, т. е. $t' = f$, где $f \in K$, и пусть $Q \in K[x]$ — полином степени n. Производная элемента $Q(t)$ является значением на элементе t полинома $DQ = fQ'$. Если старший коэффициент полинома Q не константа, то степень полинома DQ равна n. В противном случае степень полинома DQ равна $n-1$. В частности, $Q(t)$ — интеграл над K, если и только если $Q = cx + b$, где c — константа и $b \in K$.*

Доказательство. Пусть $Q = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots$ Тогда $DQ = a'_n x^n + (a'_{n-1} + na_n f)x^{n-1} + \ldots$ Многочлен DQ имеет степень, меньшую чем n, если и только если элемент a_n является константой, т. е. $a_n = c_1 \in \mathbb{C}$. Этот полином не может иметь степень, меньшую чем $n-1$. Действительно, если $a'_{n-1} + na_n f = 0$, то $\left(\frac{-a_{n-1}}{nc_1}\right)' = f$. Так как $t' = f$, то $t = \frac{-a_{n-1}}{nc_1} + c_2$, где $c_2 \in \mathbb{C}$, и, следовательно, $t \in K$. Включение $t \in K$ противоречит трансцендентности элемента t над полем K. □

Лемма 3.12. *Пусть $t \in F$ — трансцендентный элемент над полем K, являющийся экспонентой интеграла над K, т. е. $t' = ft$, где $f \in K$, и пусть $Q(x) = \sum\limits_{m \leqslant k \leqslant n} a_k x^k$ — полином Лорана над K. Производная элемента $Q(t)$ равна $DQ(t)$, где $DQ(x) = \sum\limits_{m \leqslant k \leqslant n} (a'_k + ka_k f)x^k$ — полином Лорана, коэффициент $a'_k + ka_k f$ которого не равен нулю, если $k \neq 0$ и $a_k \neq 0$. В частности, элемент $Q(t)$ является интегралом над K, если и только если полином Лорана Q совпадает со своим свободным членом a_0.*

Доказательство. Покажем, что если $k \neq 0$ и $a_k \neq 0$, то коэффициент $a'_k + ka_k f$ не может обращаться в нуль. Действительно, в противном случае элементы a_k и t^{-k} удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению: $a'_k = -kfa_k$ и $(t^{-k})' = -kt^{-k-1}ft = -kft^{-k}$, откуда следует, что $t^{-k} = ca_k$, где c — константа. Значит, элемент t алгебраичен над полем K, что противоречит предположению о его трансцендентности. □

3.6. Доказательство теоремы Лиувилля. Вернемся к доказательству теоремы Лиувилля.

а. Случай алгебраического расширения. Пусть поле $F_1 = K\langle x_1\rangle$ получено из K присоединением корня x_1 неприводимого над K полинома P степени n. Каждый элемент поля F_1 является значением на x_1 некоторого полинома над полем K степени меньше n. По индукционному предположению существуют полиномы $M_1, \ldots, M_q$ и M_0 степени меньше n, такие что

$$f = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \frac{(M_i(x_1))'}{M_i(x_1)} + (M_0(x_1))'.$$

Пусть F — дифференциальное поле, полученное из K присоединением всех корней $x_1, \ldots, x_n$ полинома P, и $K\langle x_i\rangle$ — подполе в F, полученное присоединением к K элемента x_i. В силу изоморфизма полей $K\langle x_1\rangle, \ldots, K\langle x_n\rangle$ для каждого $k = 1, \ldots, n$ (см. лемму 3.5) имеем

$$f = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \frac{(M_i(x_k))'}{M_i(x_k)} + (M_0(x_k))'.$$

Возьмем в поле F среднее арифметическое полученных n тождеств. Согласно лемме 3.3 для каждого i имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(M_i(x_k))'}{M_i(x_k)} = \frac{Q_i'}{Q_i},$$

где $Q_i = M_i(x_1)\ldots M_i(x_n)$. Элементы Q_i и $Q_0 = \frac{1}{n}(M_0(x_1) + \ldots + M_0(x_n))$ симметрично зависят от корней полинома P и поэтому лежат в поле K. Итак, $f = \sum\limits_{i=1}^{q} \frac{\lambda_i}{n} \frac{Q_i'}{Q_i} + Q_0'$, где $Q_1, \ldots, Q_q, Q_0 \in K$. В случае алгебраического расширения $K \subset F_1$ индукционный шаг сделан.

б. Случай присоединения логарифма *t*. Пусть поле F_1 получается из K присоединением трансцендентного над K элемента t, являющегося логарифмом над K (т. е. $t' = a'/a$, где $a \in K$). Логарифм над полем K является интегралом над полем K — его производная a'/a лежит в поле K. Мы рассматриваем F_1 как поле рациональных функций над полем K с операцией дифференцирования $D\varphi = (a'/a)\varphi'$. По лемме 3.10 каждый неприводимый полином L взаимно прост со своей производной DL.

По индукционному предположению элемент f допускает представление Лиувилля над полем F_1, т. е. (см. п. 3.4) элемент f записывается в виде

$$f = \sum \lambda_i \frac{A_i'}{A_i} + \sum \mu_k \frac{DP_k}{P_k} + DR_0.$$

Применим следствия 3.8 и 3.9 к функции $G=f$, не зависящей от t. Так как все L_j-полярные составляющие функции f равны нулю, то равны нулю все L_j-полярные составляющие функции R_0 и все логарифмические члены $\mu_k \frac{DP_k}{P_k}$, т. е. $f=\sum \lambda_i \frac{A_i'}{A_i}+DQ$, где Q — полиномиальная составляющая функции R_0. Производная полинома Q должна лежать в поле K. По лемме 3.11 имеем $Q(t)=ct+A$, где c — комплексная константа и $A \in K$. По условию $t=a'/a$, поэтому

$$f=\sum \lambda_i \frac{A_i'}{A_i}+c\frac{a'}{a}+A'.$$

В случае логарифмического расширения $K \subset F_1$ индукционный шаг сделан.

в. Случай присоединения экспоненты *t*. Пусть поле F_1 получается из K присоединением трансцендентного над K элемента t, являющегося экспонентой над K (т. е. $t'=a't$, где $a \in K$). Экспонента над полем K является частным случаем экспоненты интеграла над полем K. Мы рассматриваем F_1 как поле рациональных функций над полем K с операцией дифференцирования $D\varphi=(a't)\varphi'$. По лемме 3.10 каждый неприводимый полином $L_j \neq x$ взаимно прост со своей производной.

По индукционному предположению элемент f допускает представление Лиувилля над полем F_1, т. е. (см. п. 3.4) элемент f записывается в виде

$$f=\sum \lambda_i \frac{A_i'}{A_i}+\sum \mu_k \frac{DP_k}{P_k}+DR_0.$$

Применим следствия 3.8, 3.9 к функции $G=f$, не зависящей от t. Так как все L_j-полярные составляющие функции f равны нулю, то при $L_j \neq x$ равны нулю все L_j-полярные составляющие функции R_0 и все логарифмические члены $\mu_k \frac{DP_k}{P_k}$, где $P_k \neq x$, т. е.

$$f=\sum \lambda_i \frac{A_i'}{A_i}+\sum D\left(\frac{a_m}{x^m}\right)+\mu\frac{Dx}{x}+DQ,$$

где Q — полиномиальная составляющая функции R_0 (в правой части мы должны сохранить производную $\sum D\left(\frac{a_m}{x^m}\right)$ от x-полярной части функции R_0 и логарифмический член $\mu\frac{Dx}{x}$).

По определению значение рациональной функции $\mu\frac{Dx}{x}$ на элементе t равно $\mu a' \in K$. Поэтому производная $D\left(Q+\sum \frac{a_m}{x^m}\right)$ лежит в поле K. По лемме 3.12 это возможно, лишь если полином Лорана $Q+\sum \frac{a_m}{t^m}$ совпадает со своим свободным членом A. Имеем

$$f=\sum \lambda_m \frac{A'_m}{A_m}+(\mu a+A)'.$$

В случае экспоненциального расширения $K\subset F_1$ индукционный шаг сделан.

Теорема Лиувилля об интегралах доказана.

§ 4. Интегрирование функций, содержащих логарифм

В этом параграфе приводится критерий элементарности первообразных 1-форм вида $R(z,u)\,dz$, где R — рациональная функция двух переменных, z — комплексная переменная и $u=\ln a$ для некоторой рациональной функции a комплексной переменной z. Другими словами, приводится критерий элементарности интегралов от функций, лежащих в логарифмическом расширении F дифференциального поля K рациональных функций комплексной переменной z, т. е. $K=\mathbb{C}\langle z\rangle$, $F=K\langle t\rangle$, $t'=a'/a$, $a\in K$. Поле F мы будем рассматривать как поле рациональных функций над полем K с операцией дифференцирования D, где $D\varphi=(a'/a)\varphi'$ (см. введение к § 3 и п. 3.4). Согласно теореме Лиувилля функция $G(t)\in F$ имеет элементарный интеграл, если и только если она представима (см. п. 3.4) в виде

$$G=\sum \lambda_i \frac{A'_i}{A_i}+\sum \mu_k \frac{DP_k}{P_k}+DR_0.$$

Введем несколько определений. *Кратностью* ненулевой L_j-полярной составляющей рациональной функции R назовем число $q-1$, где q — порядок этой составляющей. Будем говорить, что L_j-полярная составляющая *некратна*, если ее кратность равна нулю. Будем говорить, что рациональная функция R имеет *некратную полярную составляющую*, если некратны все ее L_j-полярные составляющие.

4.1. Полярная часть интеграла. Функцию Ψ будем называть *полярной частью интеграла* функции G, если полиномиальная составляющая функции Ψ равна нулю и полярная составляющая функции $G-D\Psi$ некратна. *Для каждой функции G существует не более одной полярной части интеграла.* Действительно, различные функции Ψ_1

и Ψ_2, не имеющие полиномиальных составляющих, должны иметь различные L_j-полярные составляющие для некоторого полинома L_j. Для этого полинома L_j-полярная составляющая функции $D\Psi_1 - D\Psi_2$ имеет положительную кратность. Поэтому функции Ψ_1 и Ψ_2 не могут одновременно быть полярными частями интеграла функции G.

Утверждение 4.1. *Для каждой функции G существует полярная часть интеграла. Более того, ее можно явно вычислить по набору L_j-полярных составляющих функции G, имеющих положительную кратность.*

Доказательство. Опишем итерационное построение полярной части интеграла. На каждом шаге исходная задача сводится к аналогичной задаче для новой рациональной функции, имеющей меньшую суммарную кратность полярных составляющих.

Пусть для некоторого полинома L_j степени p старший член L_j-полярной составляющей функции G равен Q/L_j^{m+1}, где Q — полином степени меньше p и $m>0$. Выберем полином T степени меньше p, такой что старший член L_j-полярной составляющей функции $D\left(\frac{T}{L_j^m}\right)$ равен Q/L_j^{m+1}, т. е. $(-m)T\,DL_j \equiv Q \bmod L_j$. Обозначим через l_j полином, для которого выполняется сравнение $(DL_j)l_j \equiv 1 \bmod L_j$. Полином l_j явно строится по полиному DL_j при помощи алгоритма Евклида (напомним, что полиномы DL_j и L_j взаимно просты). Теперь достаточно выбрать в качестве полинома T остаток при делении полинома $Ql_j/(-m)$ на полином L_j.

Функция $G_1 = G - D(T/L_j^m)$ имеет меньшую суммарную полярную кратность, чем функция G. Поэтому можно считать, что полярная часть Ψ_1 интеграла функции G_1 уже найдена. По построению полярная часть Ψ интеграла функции G равна $\Psi_1 + T/L_j^m$. □

Утверждение 4.1 сводит задачу интегрирования рациональных функций к задаче интегрирования рациональных функций с некратной полярной составляющей.

4.2. Логарифмическая часть интеграла. Пусть G — рациональная функция, имеющая некратную полярную часть. Функция $\Phi = \sum \mu_k \frac{DP_k}{P_k}$, где P_k — неприводимые полиномы с единичным старшим коэффициентом, а μ_k — комплексные числа, называется *логарифмической частью интеграла* функции G, если функция $G - \Phi$ является полиномом.

Рассмотрим аддитивное представление функции G, имеющей некратную полярную составляющую: $G = \sum\limits_{0\leqslant j\leqslant n} Q_j/L_j + Q$, где L_j — неприводимые полиномы с единичными старшими коэффициентами, Q и Q_j — полиномы, причем степень полинома Q_j меньше степени полинома L_j.

Утверждение 4.2. *Пусть определенная выше функция G представима в форме Лиувилля. Тогда для каждого j, $0\leqslant j\leqslant n$, выполняется тождество $Q_j \equiv \mu_j DL_j$, где μ_j — комплексное число. При выполнении этих условий функция $\Phi = \sum Q_j/L_j$ равняется производной функции $\sum \mu_j \ln L_j$ и является логарифмической частью интеграла функции G.*

Доказательство. Мы имеем дело с логарифмическим расширением поля K. Производная DL_j полинома L_j имеет меньшую степень, чем полином L_j, так как старший коэффициент полинома L_j равен единице. Поэтому старший член L_j-полярной составляющей функции $\frac{DL_j}{L_j}$ равен $\frac{DL_j}{L_j}$. Это вычисление сводит утверждение 4.2 к следствиям 3.8, 3.9. □

Следствие 4.3. *Функция G, у которой равна нулю полиномиальная составляющая, а полярная составляющая некратна, имеет элементарный интеграл, если и только если для нее выполняются условия утверждения* 4.2.

Как правило, для рациональных функций, имеющих некратную полярную часть, условия утверждения 4.2 не выполняются. Поэтому, как правило, такие функции имеют неэлементарные интегралы.

Пример. Пусть f, g — рациональные функции переменной z, причем функция f не равна константе. Тогда *интеграл* $\int \frac{g\,dz}{\ln f}$ *является обобщенной элементарной функцией, если и только если функция gf/f' тождественно равна константе*. В частности, интеграл $\int \frac{dz}{\ln z}$ неэлементарен.

4.3. Интегрирование полинома от логарифма. Пусть теперь G — полином, $G(t) = a_n t^n + \ldots + a_0$, $t' = a'/a$ и $a, a_0, \ldots, a_n \in K = \mathbb{C}\langle z\rangle$. Двучлен $\Delta_n = ct^{n+1} + b_n t^n$ назовем *n-й полиномиальной компонентой интеграла G*, если полином $G - D\Delta_n$ имеет степень, меньшую чем n. Мы будем пользоваться тем обстоятельством, что элемент a, фигурирующий в определении логарифмического расширения $F = K\langle t\rangle$,

$t' = a'/a$, и коэффициенты a_k полинома G являются рациональными функциями комплексной переменной z. Рассмотрим следующие две 1-формы комплексной переменной z: $(a'/a)\,dz$ и $a_n\,dz$. Будем рассматривать вычеты $\operatorname{res}_q(a'/a)\,dz$ и $\operatorname{res}_q a_n\,dz$ этих форм в точке q комплексной прямой как функции точки $q \in \mathbb{C}$ (эти функции на комплексной прямой равны нулю всюду, кроме конечного числа точек).

Утверждение 4.4. *Если полином $G = a_n t^n + \ldots$ степени $n > 0$ представим в форме Лиувилля, то для некоторого комплексного числа μ для любой точки $q \in \mathbb{C}$ выполняется тождество $\operatorname{res}_q a_n\,dz \equiv \equiv \mu \operatorname{res}_q(a'/a)\,dz$. При выполнении этого условия существует двучлен $\Delta_n = ct^{n+1} + b_n t^n$, в котором коэффициент c равен $\mu/(n+1)$, а коэффициент b_n является рациональной функцией комплексной переменной z, определенной с точностью до аддитивной постоянной равенством $b'_n = a_n - \mu a'/a$. Этот двучлен Δ_n является n-й полиномиальной компонентой интеграла G.*

Доказательство. Пусть полином G представим в форме Лиувилля (см. п. 3.4). Из следствий 3.8, 3.9 видно, что полином G должен быть производной некоторого полинома G_0, т. е. $G = DG_0$. Согласно лемме 3.11 старшие мономы полинома G_0 имеют вид $G_0 = ct^{n+1} + + b_n t^n + \ldots$, где c — комплексная константа (возможно, равная нулю). Дифференцируя, получим

$$DG_0(t) = ((n+1)c(a'/a) + b'_n)t^n + \ldots$$

Рациональная функция b_n комплексной переменной z должна удовлетворять уравнению $b'_n = a_n - (n+1)c(a'/a)$. Это уравнение имеет рациональное решение, если и только если все вычеты формы $(a_n - (n+1)c(a'/a))\,dz$ равны нулю, откуда вытекает утверждение 4.4. □

Как правило, для полиномов положительной степени n условия утверждения 4.4 не выполняются, поэтому полиномы от логарифмов обычно имеют неэлементарные интегралы.

Пример. Пусть f, g — рациональные функции переменной z, причем функция f не равна константе. Тогда *интеграл $\int g \ln f\,dz$ является обобщенной элементарной функцией, если и только если функция g представима в виде $cf'/f + \varphi'$, где c — константа, а φ — рациональная функция*. В частности, неэлементарен интеграл

$$\int \frac{\ln z\,dz}{z-1}.$$

4.4. Интегрирование функций, лежащих в логарифмическом расширении поля $\mathbb{C}\langle z\rangle$. Мы приходим к процедуре, позволяющей либо найти интеграл функции G, либо доказать, что этот интеграл не берется в обобщенных элементарных функциях.

Шаг 1. Если рациональная функция G имеет кратную полярную составляющую, то, пользуясь утверждением 4.1, можно найти полярную часть Ψ интеграла функции G и перейти к функции $G_s = G - D\Psi$, у которой полярная составляющая некратна.

Шаг 2. Для рациональной функции G_s с некратной полярной составляющей нужно проверить выполнение условий утверждения 4.2. Если эти условия не выполнены, то интеграл функции G не берется в обобщенных элементарных функциях. Если условия утверждения 4.2 выполнены, то можно найти логарифмическую часть Φ интеграла функции G_s. По построению интеграл функции Φ является линейной комбинацией логарифмов, а функция $G_s - \Phi$ является полиномом G_n некоторой степени n.

Шаг 3_n. Для полинома G_n нужно проверить выполнение условий утверждения 4.4. Если они не выполнены, то интеграл функции G не берется в обобщенных элементарных функциях. Если условия утверждения выполнены, то можно найти двучлен Δ_n, являющийся n-й полиномиальной компонентой интеграла полинома G. Функция $G_n - D\Delta_n$ является полиномом G_{n-1} степени $n-1$.

Шаги 3_{n-1}, …, 3_1. Повторяя процедуру шага 3_n, мы либо будем переходить к полиномам все меньшей и меньшей степени, либо на некотором шаге докажем неэлементарность исходного интеграла.

Шаг 3_0. Если мы дойдем до полинома G_0 нулевой степени, то исходный интеграл элементарен. Действительно, полином нулевой степени — это рациональная функция комплексной переменной z, и интеграл от нее всегда берется в элементарных функциях.

§ 5. Интегрирование функций, содержащих экспоненту

В этом параграфе приводится критерий элементарности первообразных 1-форм вида $R(z,u)\,dz$, где R — рациональная функция двух переменных, z — комплексная переменная и $u = \exp a$ для некоторой рациональной функции a комплексной переменной z. Другими словами, приводится критерий элементарности интегралов от функций, лежащих в экспоненциальном расширении F дифференциального поля K рациональных функций одной переменой z, т. е. $K=\mathbb{C}\langle z\rangle$, $F=K\langle t\rangle$, $t'=a't$, $a\in K$. Поле F мы будем рассматривать как поле рациональных функций над полем K с операцией дифференцирования D, где $D\varphi(t)=a'(t)t\varphi'(t)$ (см. введение к § 3 и п. 3.4).

Согласно теореме Лиувилля функция $G(t)\in F$ имеет элементарный интеграл, если и только если она представима (см. п. 3.4) в виде

$$G=\sum\lambda_i\frac{A_i'}{A_i}+\sum\mu_k\frac{DP_k}{P_k}+DR_0.$$

Модифицируем для экспоненциального случая определения из § 4. Неприводимый полином x играет особую роль для экспоненциальных расширений: это единственный неприводимый полином L, который является делителем своей производной DL (см. лемму 3.10).

5.1. Главная полярная часть интеграла. *Главной полярной составляющей* рациональной функции R назовем сумму ее L_j-полярных составляющих по всем неприводимым полиномам L_j, кроме полинома $L=x$.

Рассмотрим полином, являющийся полиномиальной составляющей рациональной функции R. Сумму всех мономов этого полинома, кроме свободного члена, назовем *главной полиномиальной составляющей* функции R.

Назовем *лорановской составляющей* функции R сумму ее полиномиальной составляющей и ее x-полярной составляющей.

Функцию Ψ назовем *главной полярной частью интеграла* функции G, если ее лорановская составляющая равна нулю и главная полярная составляющая функции $G-D\Psi$ некратна.

Утверждение 5.1. *Для каждой функции G существует главная полярная часть интеграла. Более того, ее можно явно вычислить, если знать набор всех L_j-полярных составляющих, входящих в главную полярную составляющую функции G и имеющих положительную кратность.*

Мы не будем останавливаться на доказательстве утверждения 5.1 — оно дословно повторяет доказательство утверждения 4.1. Единственное различие — в процессе итерационного построения главной полярной части интеграла функции G не нужно обращать внимание на x-полярную составляющую этой функции.

Утверждение 5.1 сводит задачу интегрирования рациональных функций к задаче интегрирования рациональных функций с некратной главной полярной составляющей.

5.2. Главная логарифмическая часть интеграла. Пусть G — рациональная функция, имеющая некратную главную полярную часть. Функция $\Phi = \sum \mu_k \frac{DP_k}{P_k}$, где P_k — не равный x неприводимый полином с единичным старшим коэффициентом, а μ_k — комплексное число, называется *главной логарифмической частью интеграла функции* G, если функция $G - \Phi$ является полиномом Лорана.

Рассмотрим аддитивное представление функции G, имеющей некратную главную полярную составляющую, $G = \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} \frac{Q_j}{L_j} + Q$, где L_j — не равный x неприводимый полином с единичным старшим коэффициентом, Q_j — полином, степень которого меньше степени полинома L_j, и Q — полином Лорана. Обозначим через $[DL_j]$ остаток при делении полинома DL_j на полином L_j.

Утверждение 5.2. *Пусть определенная выше функция G представима в форме Лиувилля. Тогда для каждого j, $0 \leqslant j \leqslant n$, выполняется тождество $Q_j \equiv \mu_j [DL_j]$, где μ_j — комплексное число. При выполнении этих условий функция $\Phi = \sum \mu_j \frac{DL_j}{L_j} = \sum \mu_j (\ln L_j)'$ является главной логарифмической частью интеграла функции G, а разность $\Phi - \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} \frac{[DL_j]}{L_j}$ лежит в поле $K = \mathbb{C}\langle z \rangle$.*

Доказательство. Мы имеем дело с экспоненциальным расширением поля K. Производная DL_j полинома L_j имеет ту же степень, что полином L_j. Следовательно, разность $\frac{DL_j}{L_j} - \frac{[DL_j]}{L_j}$ лежит в поле $K = \mathbb{C}\langle z \rangle$. Это вычисление сводит утверждение 4.2 к следствиям 3.8, 3.9. □

Следствие 5.3. *Функция G, у которой главная полярная составляющая некратна и главная лорановская составляющая равна нулю, имеет элементарный интеграл, если и только если для нее выполняются условия утверждения* 5.2.

Доказательство. Если функция G удовлетворяет условию утверждения 5.2, то для нее существует главная логарифмическая часть интеграла Φ, которая имеет элементарный интеграл. Разность

$G-\Phi$ — рациональная функция комплексной переменной z. Ее интеграл тоже элементарен. □

Как правило, для рациональных функций, имеющих некратную главную полярную часть, условия утверждения 5.2 не выполняются. Поэтому обычно такие функции имеют неэлементарные интегралы.

Пример. Пусть f, g, h — рациональные функции комплексной переменной z, причем функция f не равна константе, а функция h не равна нулю. Рассмотрим интеграл $\int \frac{g\,dz}{\exp f + h}$. *Для элементарности интеграла необходимо и достаточно, чтобы функция $g/(h' - f'h)$ была постоянна* (действительно, в этом примере $L = t + h$, $DL = f't + h'$, $[DL] = h' - f'h$). В частности, интеграл $\int \frac{g\,dz}{\exp z + 1}$ элементарен, если и только если рациональная функция g постоянна.

5.3. Интегрирование полинома Лорана от экспоненты. Пусть теперь $G(t) = \sum\limits_{m\leqslant k\leqslant n} a_k t^k$ — полином Лорана над K с нулевым свободным членом, $t' = a't$ и $a, a_m, \ldots, a_k \in K$, $a_0 = 0$.

Утверждение 5.4. 1. *Пусть полином Лорана G представим в форме Лиувилля. Тогда существует полином Лорана Δ с нулевым свободным членом, такой что $D\Delta = G$.*

2. *Для существования полинома Лорана Δ необходимо и достаточно, чтобы для любого k, такого что $m \leqslant k \leqslant n$ и $k \neq 0$, линейное дифференциальное уравнение $b_k' + kb_k a' = a_k$ имело решение в поле K, $b_k \in K$. При этом $\Delta = \sum\limits_{m\leqslant k\leqslant n} b_k t^k$.*

Доказательство. Из следствий 3.8, 3.9 вытекает, что форма Лиувилля для полинома Лорана имеет нулевую главную полярную часть и нулевую главную логарифмическую часть и, следовательно, является полиномом Лорана. Согласно лемме 3.12 для полинома Лорана Δ выполняется равенство $D\Delta = G$, если и только если он удовлетворяет условиям п. 2 утверждения 5.4. □

Как правило, дифференциальные уравнения над полем $K = \mathbb{C}\langle z\rangle$, о которых идет речь в утверждении 5.4, не имеют решений, являющихся рациональными функциями комплексной переменной z. Поэтому полиномы Лорана над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$ от функции $u = \exp a(z)$ обычно имеют неэлементарные интегралы. Ниже мы обсудим критерий разрешимости встретившихся дифференциальных уравнений в рациональных функциях.

5.4. Разрешимость линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Мы переходим к вопросу о разрешимости в рациональных функциях комплексной переменной z линейных дифференциальных уравнений вида $y' + f'y = g$, где f, g — рациональные функции от z. Этот вопрос решается следующим образом. Если рациональное решение y существует, то по коэффициентам f и g можно найти полюсы решения y и порядки этих полюсов (см. следствие 5.6). Тем самым можно априори указать конечномерное линейное пространство, в котором должно лежать рациональное решение уравнения, если оно существует. После этого метод неопределенных коэффициентов позволяет либо явно найти рациональное решение уравнения, либо доказать, что такого решения не существует (впрочем, отсутствие рационального решения часто видно без всяких вычислений).

Для всякой ненулевой рациональной функции φ обозначим через $\mathrm{ord}_a(\varphi)$ порядок функции φ в точке a на сфере Римана. Если $a \neq \infty$, то порядки функции и ее производной удовлетворяют следующим соотношениям: если $\mathrm{ord}_a(\varphi) \neq 0$, то $\mathrm{ord}_a(\varphi') = \mathrm{ord}_a(\varphi) - 1$. Если $\mathrm{ord}_a(\varphi) = 0$ и функция φ не константа, то $\mathrm{ord}_a(\varphi') \geqslant 0$. В частности, порядок производной в конечной точке никогда не равен -1. В точке ∞ соотношения принимают следующий вид: если $\mathrm{ord}_\infty(\varphi) \neq 0$, то $\mathrm{ord}_\infty(\varphi') = \mathrm{ord}_\infty(\varphi) + 1$. Если $\mathrm{ord}_\infty(\varphi) = 0$ и функция φ не константа, то $\mathrm{ord}_\infty(\varphi') \geqslant 2$. В частности, порядок производной в точке ∞ никогда не равен 1.

Лемма 5.5. *Пусть рациональная функция y имеет полюс в точке a, а рациональная функция f не равна константе. Тогда*

1) *если $a \in \mathbb{C}$, то порядок функции $y' + f'y$ в точке a равен минимуму из чисел* $\mathrm{ord}_a(y) - 1$ *и* $\mathrm{ord}_a(f') + \mathrm{ord}_a(y)$;

2) *если $a = \infty$, то порядок функции $y' + f'y$ в точке ∞ равен минимуму из чисел* $\mathrm{ord}_\infty(y) + 1$ *и* $\mathrm{ord}_\infty(f') + \mathrm{ord}_\infty(y)$.

Доказательство. При сделанных предположениях функции y' и $f'y'$ в точке a имеют различные порядки. Поэтому порядок суммы этих функций равен минимуму из их порядков. □

Пусть уравнение $y' + f'y = g$ имеет рациональное решение. Следствие 5.6 описывает множество полюсов решения и их порядки.

Следствие 5.6. *Точка $a \in \mathbb{C}$ — полюс функции y в следующих двух случаях*:

1) $\mathrm{ord}_a(f) \geqslant 0$, $\mathrm{ord}_a(g) < -1$; *тогда* $\mathrm{ord}_a(y) = \mathrm{ord}_a(g) + 1$;

2) $\operatorname{ord}_a(f)<0$, $\operatorname{ord}_a(g)<\operatorname{ord}_a(f)-1$; *тогда* $\operatorname{ord}_a(y)=\operatorname{ord}_a(g)+1-\operatorname{ord}_a(f)$.

Точка ∞ *— полюс функции* y *в следующих двух случаях*:

1) $\operatorname{ord}_\infty(g)\leqslant 0$, $\operatorname{ord}_\infty(f)\geqslant 0$; *тогда* $\operatorname{ord}_\infty(y)=\operatorname{ord}_\infty(g)-1$;

2) $\operatorname{ord}_\infty(f)<0$, $\operatorname{ord}_\infty(g)<1+\operatorname{ord}_\infty(f)$; *тогда* $\operatorname{ord}_\infty(y)=\operatorname{ord}_\infty(g)-1-\operatorname{ord}_\infty(f)$.

Пусть конечные полюсы $a\in A\subset\mathbb{C}$ функции y имеют порядки $k_a=-\operatorname{ord}_a y$, а точка ∞ — полюс функции y порядка $m=-\operatorname{ord}_\infty y_a$. Тогда y принадлежит конечномерному пространству функций l вида

$$l=\sum_{\substack{a\in A\\ 0<i\leqslant -k_a}}\frac{c_{i,a}}{(z-a)^i}+c_0+\sum_{0<p\leqslant m}d_pz^p.$$

Подставляя в уравнение $y'+f'y=g$ вместо y функцию l с неопределенными комплексными коэффициентами $c_{i,a}$, c_0, d_p и с полюсами и их порядками, найденными в следствии 5.6, получим систему линейных уравнений на неопределенные коэффициенты. Если она не имеет решения, то уравнение не имеет решения в рациональных функциях. Если система имеет решение, то оно определяет рациональное решение y.

Пример 1. Пусть f, g — полиномы, причем *степень полинома* g *меньше, чем степень полинома* f *минус один. Тогда уравнение* $y'+f'y=g$ *не имеет рациональных решений*. Действительно, из-за неравенства на степени полиномов уравнение, очевидно, не имеет постоянных решений. Множество полюсов решения в силу следствия 5.6 пусто. В самом деле, в точке ∞ выполняется неравенство $\operatorname{ord}_\infty(f)<0$, но неравенство $\operatorname{ord}_\infty(g)<1+\operatorname{ord}_\infty(f)$ не выполнено. Непостоянная рациональная функция должна иметь полюсы. Поэтому уравнение не имеет рациональных решений.

Пример 2. *Если* f, g *— полиномы из примера* 1, *то интеграл* $\int g(z)\exp f(z)\,dz$ *не берется в обобщенных элементарных функциях*. В частности, $\int \exp z^2\,dz$ неэлементарен.

Пример 3. *Пусть функция* g *имеет полюс первого порядка в некоторой точке* $a\in\mathbb{C}$, *а функция* f *в точке* a *регулярна. Тогда уравнение* $y'+f'y=g$ *не имеет рациональных решений*. Действительно, пусть рациональное решение существует. Согласно следствию 5.6 оно не может иметь полюс в точке a. Значит, функция $y'+f'y$ регулярна в точке a и не может иметь в ней полюс.

Пример 4. *Интеграл* $\int \frac{\exp z\,dz}{z}$ *не берется в обобщенных элементарных функциях.* Действительно, интеграл связан с расширением поля $K=\mathbb{C}\langle z\rangle$ элементом t, таким что $t'=t$, и с полиномом $G(t)=$ $=(1/z)t$. Интеграл не берется, потому что уравнение $y'+y=1/z$ не имеет рационального решения (см. пример 3).

Пример 5. *Интеграл* $\int \frac{\sin z\,dz}{z}$ *не берется в обобщенных элементарных функциях.* Действительно, интеграл связан с расширением поля $K=\mathbb{C}\langle z\rangle$ элементом t, таким что $t'=it$, и с полиномом Лорана $G(t)=\frac{1}{2iz}t-\frac{1}{2iz}t^{-1}$. Интеграл не берется, потому что уравнения $y'+iy=\frac{1}{2iz}$ и $y'-iy=-\frac{1}{2iz}$ не имеют рациональных решений (см. пример 3).

5.5. Интегрирование функций, лежащих в экспоненциальном расширении поля $\mathbb{C}\langle z\rangle$. Мы приходим к процедуре, позволяющей либо найти интеграл функции G, либо доказать, что этот интеграл не берется в обобщенных элементарных функциях.

Шаг 1. Если рациональная функция G имеет кратную главную полярную составляющую, то, пользуясь утверждением 5.1, можно найти главную полярную часть Ψ интеграла функции G и перейти к функции $G_s=G-D\Psi$, у которой главная полярная составляющая некратна.

Шаг 2. Для рациональной функции G_s с некратной главной полярной составляющей нужно проверить выполнение условий утверждения 5.2. Если эти условия не выполнены, то интеграл функции G не берется в обобщенных элементарных функциях. Если условия утверждения выполнены, то можно найти главную логарифмическую часть Φ интеграла функции G_s. По построению интеграл функции Φ является линейной комбинацией логарифмов, а функция $G_s-\Phi$ является полиномом Лорана G_L. Полином Лорана G_L есть сумма свободного члена $a_0\in\mathbb{C}\langle z\rangle$ и полинома Лорана $G_{L,0}$, не имеющего свободного члена. Рациональная функция a_0 комплексной переменной z имеет элементарный интеграл.

Шаг 3. Для полинома Лорана $G_{L,0}$ нужно проверить выполнение условий утверждения 5.4. Для этого надо узнать, разрешимы ли в рациональных функциях дифференциальные уравнения, выписанные в утверждении 5.4. В п. 5.4 разобран вопрос о разрешимости таких уравнений. В результате мы либо находим интеграл функции

G, либо доказываем, что он не берется в обобщенных элементарных функциях.

§ 6. Интегрирование алгебраических функций

Если риманова поверхность алгебраической функции имеет нулевой род, то ее интеграл всегда берется в обобщенных элементарных функциях. Если же род римановой поверхности положителен, то интеграл, как правило, не элементарен и берется в обобщенных элементарных функциях в исключительных случаях. Эти исключительные случаи обсуждаются в настоящем параграфе.

Теорема 6.1 (Лиувилля об абелевых интегралах). *Неопределенный интеграл y от алгебраической функции A комплексной переменной x берется в обобщенных элементарных функциях, если и только если он представим в виде*

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} A(x)\,dx = A_0(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \ln A_i(x),$$

где A_i при $i = 0, 1, \ldots, k$ — алгебраические функции, однозначные на римановой поверхности W подынтегральной функции A.

Доказательство. Теорема вытекает из теоремы Лиувилля об интегралах элементарных функций, примененной к полю F всех мероморфных функций на поверхности W, снабженному следующим дифференцированием: $f' = df/\alpha$, где $\alpha = \pi^* dx$ и $\pi : W \to \overline{\mathbb{C}}$ — естественная проекция римановой поверхности функции A на сферу Римана $\overline{\mathbb{C}}$ комплексной переменной x. □

Определим класс *обобщенных элементарных функций на римановой поверхности W* как класс многозначных функций, которые получаются из мероморфных функций на W при помощи арифметических операций, решения алгебраических уравнений и суперпозиций с функциями ln и exp. Пусть $\pi : W \to \overline{\mathbb{C}}$ — любое непостоянное мероморфное отображение поверхности W на сферу Римана $\overline{\mathbb{C}}$ переменной x. Как видно из определений, *обобщенная элементарная функция на римановой поверхности W — это функция вида $\pi^* f$, где f — обобщенная элементарная функция переменной x*. Переформулируем теорему 6.1 в более инвариантном виде.

Теорема Лиувилля об абелевых интегралах. *Неопределенный интеграл от мероморфной формы α на компактной римановой* *поверхности W является обобщенной элементарной функцией на W, если и только если форма α представима в виде $\alpha=\beta+\gamma$, где $\beta=$ $=dA_0$, $\gamma=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{dA_i}{A_i}$, $A_0,\ldots,A_k$ — мероморфные функции и $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ — комплексные числа.*

В связи с теоремой Лиувилля об абелевых интегралах естественно рассмотреть формулируемые ниже (см. п. 6.1 и 6.2) задачи 1 и 2, первая из которых связана с теоремой Римана—Роха, а вторая — с теоремой Абеля.

6.1. Рациональная часть абелева интеграла. Задачу выделения рациональной части интеграла алгебраической функции можно сформулировать так.

Задача 1. Представить мероморфную форму α на поверхности W в виде $\alpha=\beta+\alpha_1$, где $\beta=dA_0$ — точная мероморфная форма, а форма α_1 имеет полюсы не выше первого порядка.

Лемма 6.2. *Если мероморфная форма β на поверхности W имеет полюсы не выше первого порядка и задает нулевой класс когомологий на $W\setminus P$, где P — конечное множество, содержащее полюсы формы β, то форма β тождественно равна нулю.*

Доказательство. Форма β имеет лишь нулевые вычеты, иначе она не может быть точной. Поэтому она вообще не имеет полюсов и ее интеграл A_0 является голоморфной функцией на W. Голоморфная функция на компактной поверхности постоянна. Поэтому $\beta=dA_0=0$. □

Следствие 6.3. *Если задача 1 для формы α разрешима, то она имеет не более одного решения.*

Пусть $O\subset W$ — множество полюсов формы α. Около каждого полюса $x\in O$ фиксируем локальную координату z, такую что $z(x)=0$. Пусть форма α около точки x записывается в виде

$$\alpha=\left(\frac{c_k}{z^k}+\ldots+\frac{c_2}{z^2}+\frac{c_1}{z}+\varphi\right)dz,$$

где φ — росток голоморфной функции в точке x. Росток

$$\left(\frac{c_k}{z^k}+\ldots+\frac{c_2}{z^2}+\frac{c_1}{z}\right)dz$$

называется *главной частью* формы α около точки x (главная часть зависит от выбора локальной координаты z). По теореме Римана—

Роха существуют формы α с произвольно заданными главными частями.

Росток мероморфной функции в полюсе x формы α

$$A_{0x} = \left(\frac{(-k+1)c_k}{z^{k-1}} + \ldots + \frac{(-1)c_2}{z}\right)$$

назовем *главной частью мероморфной составляющей интеграла* формы α в точке x. Росток A_{0x} обладает следующим свойством: форма $\alpha - dA_{0x}$ в точке x имеет полюс не выше первого порядка. Это свойство определяет росток A_{0x} с точностью до прибавления ростка голоморфной функции.

Условие разрешимости задачи 1. *Задача 1 для формы α разрешима, если и только если для набора A_{0x} главных частей мероморфных составляющих интеграла формы α в ее полюсах $x \in O$ и для всякой голоморфной формы ω на W выполнено соотношение* $\sum \operatorname{res}_x(A_{0x}\omega) = 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \beta + \alpha_1$ и $\beta = dA_0$. Для всякой голоморфной формы ω сумма вычетов формы $A_0\omega$ равна нулю, так как W — компактная риманова поверхность. Отсюда и вытекает нужное равенство. Обратно, если $\sum \operatorname{res}_x(A_{0x}\omega) = 0$ для любой голоморфной формы ω, то по теореме Римана—Роха существует мероморфная функция A_0, имеющая полюсы лишь в точках $x \in O$ и такая, что для каждой точки $x \in O$ росток $A_0 - A_{0x}$ голоморфен. Очевидно, что форма $\alpha - dA_0$ имеет лишь полюсы не выше первого порядка. □

На кривой рода нуль не существует ненулевых голоморфных форм, и задача 1 всегда разрешима. На кривой положительного рода задача 1, как правило, не разрешима.

6.2. Логарифмическая часть абелева интеграла. Задачу выделения логарифмической части интеграла алгебраической функции можно сформулировать так.

Задача 2. 1. Для заданной мероморфной формы α на поверхности W найти форму γ, имеющую те же вычеты, что и форма α, и являющуюся линейной комбинацией дифференциалов логарифмов мероморфных функций.

2. Если искомая форма γ существует, представить ее в виде суммы $\gamma = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{dA_i}{A_i}$, где A_i — мероморфные функции на W, содержащей наименьшее возможное число слагаемых n.

Пусть P — множество точек x, в которых вычет $\operatorname{res}_x \alpha$ формы α не равен нулю. На множестве P определена функция $\operatorname{res}\alpha\colon P \to \mathbb{C}^*$, сопоставляющая точке $x \in P$ вычет $\operatorname{res}_x \alpha$. С функцией $\operatorname{res}\alpha$ свяжем векторное пространство $V(\operatorname{res}\alpha) \subset \mathbb{C}$ над полем $\mathbb{Q}$, порожденное значениями функции $\operatorname{res}\alpha$.

Лемма 6.4. *Пусть сумма* $\gamma = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{dA_i}{A_i}$ *является решением п.* 2 *задачи* 2 *для формы α. Тогда* 1) *числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *лежат в пространстве* $V(\operatorname{res}\alpha)$ *и образуют его базис,* 2) *носители дивизоров* (A_i) *функции* A_i *при* $i = 1, \ldots, n$ *лежат в множестве* P.

Доказательство. Согласно лемме 3.4 если числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ зависимы над $\mathbb{Q}$, то число слагаемых в представлении формы γ можно уменьшить (выбрав другой набор мероморфных функций), что противоречит условию. Если x — нуль или полюс одной из функций $A_1, \ldots, A_n$, то вычет формы $\sum \lambda_i \frac{dA_i}{A_i}$ в точке x не равен нулю, так как он является нетривиальной целочисленной линейной комбинацией чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Поэтому $x \in P$.

Рассмотрим целочисленные функции φ_i на множестве P, сопоставляющие точке $x \in P$ порядок функции A_i в этой точке, $\varphi_i(x) = \operatorname{res}_x \frac{dA_i}{A_i}$. Покажем, что функции φ_i на множестве P линейно независимы. Действительно, из существования линейного соотношения $\sum \mu_i \varphi_i = 0$ вытекает, что форма $\omega = \sum \mu_i \frac{dA_i}{A_i}$ голоморфна на W. Покажем, что форма ω равна нулю. Представим ω как линейную комбинацию минимально возможного числа дифференциалов логарифмов мероморфных функции. Как мы только что показали, носители дивизоров этих мероморфных функций должны содержаться в множестве полюсов формы ω, т. е. дивизоры этих функций равны нулю, и поэтому $\omega \equiv 0$. Следовательно, формы $\frac{dA_i}{A_i}$ линейно зависимы, и число слагаемых в представлении формы γ можно уменьшить, что противоречит предположению. Мы доказали, что функции φ_i независимы.

Покажем, что числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ лежат в векторном пространстве $V(\operatorname{res}\alpha)$. Действительно, форма $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{dA_i}{A_i}$ имеет те же вычеты, что и форма α, т. е. $\sum \lambda_i \varphi_i(x) = \operatorname{res}_x \alpha$ при $x \in P$. Так как φ_i — независимые целочисленные функции, то числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются линейными комбинациями с рациональными коэффициентами значений функции $\operatorname{res} \alpha$, т. е. они лежат в векторном пространстве $V(\operatorname{res} \alpha)$. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ независимы над $\mathbb{Q}$. Они порождают пространство $V(\operatorname{res} \alpha)$, так как $\sum \lambda_i \varphi_i(x) = \operatorname{res}_x \alpha$. □

Следствие 6.5. *Если для формы α задача 2 разрешима, то существует единственная форма γ, удовлетворяющая п. 1 этой задачи.*

Доказательство. Если есть две формы, удовлетворяющие п. 1 задачи 2, то все вычеты разности этих форм равны нулю. Повторяя рассуждение из доказательства леммы 6.4, получим, что разность форм равна нулю. □

Следствие 6.6. *Если для формы α задача 2 разрешима, то число слагаемых в решении п. 2 задачи 2 для формы γ равно размерности пространства $V(\operatorname{res} \alpha)$ над полем $\mathbb{Q}$.*

Скажем, что дивизор $D = \sum r_i x_i$, $x_i \in W$, с рациональными коэффициентами $r_i = \frac{p_i}{g_i}$, имеющий степень $\sum r_i = 0$, *почти главный*, если существует такое натуральное число N, что дивизор ND главный, т. е. $ND = (A)$, где (A) — дивизор некоторой мероморфной функции A. Перефразируем это определение. Пусть k — наименьшее общее кратное знаменателей q_i коэффициентов r_i дивизора D. Дивизор $D = \sum r_i x_i$ с рациональными коэффициентами почти главный, если дивизор kD с целыми коэффициентами имеет конечный порядок в якобиане кривой W.

Утверждение 6.7. 1. *Сумма почти главных дивизоров — почти главный дивизор.*

2. *Произведение почти главного дивизора на рациональное число — почти главный дивизор.*

Доказательство. 1. Если $N_1 D_1 = (A_1)$ и $N_2 D_2 = (A_2)$, то тогда $(N_1 N_2)(D_1 + D_2) = (A_1^{N_2} A_2^{N_1})$.

2. Если $ND = (A)$ и $r = p/q$, то $Nq(rD) = (A^p)$. □

Для конечного множества P точек компактной римановой поверхности обозначим через $J_0(P)$ множество функций $\psi\colon P \to \mathbb{Q}$, принимающих рациональные значения и таких, что дивизор $D_\psi = \sum_{x \in P} \psi(x) x$ почти главный. По только что доказанному утверждению функции множества $J_0(P)$ образуют векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$. Пространство $J_0(P)$ содержит решетку $\bar{J}_0(P)$ функций, соответствующих главным дивизорам. Пространство $J_0(P)$ порождается решеткой $\bar{J}_0(P)$ над рациональными числами.

Сформулируем необходимое и достаточное условие разрешимости задачи 2. Пусть P — множество точек x, в которых вычет $\operatorname{res}_x \alpha$ формы α не равен нулю. На множестве P определена функция $\operatorname{res}\alpha\colon P \to \mathbb{C}^*$, сопоставляющая точке $x \in P$ вычет $\operatorname{res}_x \alpha$. Выше мы связали с функцией $\operatorname{res}\alpha$ пространство $V(\operatorname{res}\alpha)$ над полем $\mathbb{Q}$, натянутое на значения функции $\operatorname{res}\alpha$. Определим теперь еще одно пространство $F(\operatorname{res}\alpha)$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — базис пространства $V(\operatorname{res}\alpha)$ над полем $\mathbb{Q}$. Рассмотрим координатные функции $\varphi_i\colon P \to \mathbb{Q}$, $i = 1, \dots, n$, определенные тождеством $\operatorname{res}_x \alpha = \sum \varphi_i(x)\lambda_i$. *Пространство $F(\operatorname{res}\alpha)$ — это векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$, натянутое на функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.* Определение пространства $F(\operatorname{res}\alpha)$ корректно. Действительно, пусть $u_1, \dots, u_n$ — другой базис пространства $V(\operatorname{res}\alpha)$ и $\lambda_i = \sum a_{i,j}u_j$, где $\{a_{i,j}\}$ — обратимая $(n \times n)$-матрица с рациональными компонентами. Тогда $\operatorname{res}\alpha \equiv \sum \rho_j u_j$, где $\rho_j = \sum a_{i,j}\varphi_i$. Поэтому пространство над полем $\mathbb{Q}$, натянутое на функции ρ_j, содержится в пространстве над полем $\mathbb{Q}$, натянутом на функции φ_j. Обратное включение доказывается так же.

Утверждение 6.8. *Для каждой функции $\varphi\colon P \to \mathbb{Q}$ из пространства $F(\operatorname{res}\alpha)$ справедливо равенство $\sum\limits_{x \in P} \varphi(x) = 0$.*

Доказательство. Сумма вычетов формы α равна нулю. Вычет $\operatorname{res}_x \alpha$ можно рассматривать как вектор из пространства $V(\operatorname{res}\alpha)$. Если сумма векторов равна нулю, то при любом выборе базиса $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ для всякого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, сумма i-х координат этих векторов тоже равна нулю. □

Условие разрешимости задачи 2. *Задача 2 для формы α разрешима, если и только если пространство $F(\operatorname{res}\alpha)$ содержится в пространстве $J_0(P)$.*

Доказательство. Пусть задача 2 разрешима и сумма $\sum \lambda_i \frac{dA_i}{A_i}$, имеющая те же вычеты, что и форма α, содержит минимально возможное число членов. Рассмотрим целочисленные функции φ_i на множестве P, сопоставляющие точке $x \in P$ порядок функции A_i в этой точке, $\varphi_i(x) = \operatorname{res}_x \frac{dA_i}{A_i}$. Форма $\gamma = \sum \lambda_i \frac{dA_i}{A_i}$ имеет те же вычеты, что и форма α, т. е. $\sum \lambda_i \varphi_i(x) = \operatorname{res}_x \alpha$. По лемме 3.4 числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ образуют базис векторного пространства $V(\operatorname{res}\alpha)$. Поэтому пространство $F(\operatorname{res}\alpha)$ порождено функциями $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Эти функции лежат в пространстве $J_0(P)$, так как дивизоры $D_i = \sum \varphi_i(x)x$ являются дивизорами функций A_i.

Пусть пространство $F(\operatorname{res}\alpha)$ содержится в пространстве $J_0(P)$. Выберем базис $\mu_1, \ldots, \mu_n$ пространства $V(\operatorname{res}\alpha)$. По условию функция $\operatorname{res}\alpha$ представима в виде $\operatorname{res}\alpha = \sum \mu_i \rho_i$, где функции ρ_i лежат в пространстве $J_0(P)$. Это означает, что для каждого i существуют натуральное число N_i и мероморфная функция B_i, такие что значение функции $N_i\rho_i$ в точке $x \in P$ равно вычету в этой точке функции $\frac{dB_i}{B_i}$. Отсюда следует, что форма $\sum \frac{\mu_i}{N_i}\frac{dB_i}{B_i}$ имеет те же вычеты, что и форма α. □

Итак, согласно доказанному условию задача 2 разрешима, если и только если любой дивизор из конечного числа явно построенных дивизоров степени нуль после умножения на подходящее целое число становится главным. Теорема Абеля доставляет описание главных дивизоров. Поэтому вопрос о разрешимости задачи 2 в принципе сводится к теореме Абеля.

Замечание. Является ли явно заданный дивизор на алгебраической кривой главным или почти главным? Этот вопрос может оказаться непростым, так как теорема Абеля неконструктивна (ср. [17]). Абель столкнулся с этой проблемой в своей работе об интегрируемости в элементарных функциях псевдогиперэллиптических интегралов. Работа Абеля была закончена Золотарёвым (см. [53]).

Пример 1. Пусть W — кривая рода один. Фиксируем структуру алгебраической абелевой группы на W, задав точку $* \in W$, являющуюся нулевым элементом группы. Рассмотрим всюду плотное множество F на кривой W, состоящее из элементов конечного порядка группы W. *Задача 2 разрешима для любой формы α, для которой множество P содержится в F.*

Обсудим противоположную ситуацию. Скажем, что конечное множество F на кривой положительного рода является *общим подмножеством*, если не существует ни одного ненулевого главного дивизора D, носитель которого лежит в множестве F. Из теоремы Абеля видно, что среди подмножеств с фиксированным числом точек на кривой положительного рода множество общих подмножеств имеет полную меру.

Пример 2. Пусть W — кривая положительного рода и F — общее подмножество на ней. *Задача 2 неразрешима для любой формы α, для которой множество P непусто и содержится в F.*

6.3. Элементарность и неэлементарность абелевых интегралов. Вопрос об элементарности интеграла алгебраической функции сводится к задачам 1 и 2 (см. п. 6.1, 6.2).

Теорема 6.9. *Первообразная мероморфной формы α обобщенно-элементарна, если и только если для формы α разрешимы задачи* 1 *и* 2 *и форма α равна сумме решений этих задач, т. е. $\alpha = \beta + \gamma$, где β — решение задачи* 1 *для формы α и γ — решение задачи* 2 *для формы α.*

Доказательство. Если неопределенный интеграл от формы α является обобщенной элементарной функцией, то по теореме Лиувилля для формы α разрешимы задачи 1 и 2 и форма α равна сумме решений этих задач. В обратную сторону теорема очевидна. □

Следствие 6.10. *Пусть для мероморфной формы α на кривой положительного рода множество точек P, в которых вычет формы α не равен нулю, является общим подмножеством кривой. Тогда неопределенный интеграл от формы α не может быть обобщенной элементарной функцией.*

Пусть P — фиксированное конечное подмножество на компактной кривой W. Обозначим через $\overline{\Omega}_P$ пространство мероморфных 1-форм на кривой W, вычеты которых в каждой точке множества $W \setminus P$ равны нулю. *Каждая форма $\alpha \in \overline{\Omega}_P$ задает* следующий *класс одномерных когомологий* $[\alpha]$ *множества* $W \setminus P$: значение $[\alpha](\gamma)$ класса $[\alpha]$ на 1-цикле γ равняется $\int_{\bar{\gamma}} \alpha$, где $\bar{\gamma}$ — 1-цикл, не проходящий через полюсы формы α, гомологичный циклу γ в области $W \setminus P$. От выбора 1-цикла $\bar{\gamma}$ интеграл не зависит, так как по условию вычет формы α в каждом полюсе, лежащем в $W \setminus P$, равен нулю.

Пусть $D = (f)$ — главный дивизор на кривой W, носитель которого содержится в множестве P. С дивизором D связан целочисленный класс когомологий $[D]$ пространства $W \setminus P$, заданный 1-формой $\frac{1}{2\pi i}\frac{df}{f}$ (функция f определяется дивизором D с точностью до константы, от выбора которой 1-форма не зависит). Обозначим через $L(P)$ комплексно-линейное подпространство в одномерных когомологиях дополнения $W \setminus P$ к множеству P, порожденное целочисленными классами $[D]$ главных дивизоров D, носители которых лежат в множестве P (такие дивизоры соответствуют точкам решетки $\bar{J}_0(P)$).

Теорема 6.11. *Первообразная мероморфной формы α на кривой W, принадлежащей пространству $\overline{\Omega}_P$, является обобщенной* *элементарной функцией, если и только если класс когомологий* $[\alpha] \in H^1(W \setminus P)$ *лежит в пространстве* $L(P)$.

Доказательство. Если класс $[\alpha]$ лежит в пространстве $L(P)$, то форма α на множестве $W \setminus P$ задает тот же класс когомологий, что и некоторая форма $\gamma = \sum \lambda_i \frac{dA_i}{A_i}$, где A_i — мероморфные функции, носители дивизоров которых лежит в множестве P. Форма $\beta = \alpha - \gamma$ задает нулевой класс когомологий на $W \setminus P$. Поэтому неопределенный интеграл формы β является однозначной функцией на $W \setminus P$. Этот интеграл имеет полиномиальный рост около полюсов формы β и является, следовательно, мероморфной функцией на кривой W. Обратное утверждение вытекает из теоремы Лиувилля. □

Приведем несколько следствий доказанных теорем. Прежде всего отметим следующее топологическое препятствие к элементарности интеграла алгебраической 1-формы.

Следствие 6.12. *Если на кривой W первообразная мероморфной формы α, принадлежащей пространству $\overline{\Omega}_P$, является обобщенной элементарной функцией, то умноженное на $\frac{1}{2\pi i}$ значение класса когомологий $[\alpha]$ на любом 1-цикле $\gamma \in H_1(W \setminus P, \mathbb{Z})$ лежит в пространстве* $V(\operatorname{res}\alpha)$.

Доказательство. Действительно, если интеграл формы α элементарен, то $\alpha = dA_0 + \sum \lambda_i \frac{dA_i}{A_i}$ и числа λ_i лежат в пространстве $V(\operatorname{res}\alpha)$. Периоды формы dA_0 равны нулю, а периоды форм $\frac{1}{2\pi i}\frac{dA_i}{A_i}$ целочисленны. □

Следствие 6.13 (ср. [53]). *Если все вычеты мероморфной формы α на компактной римановой поверхности W равны нулю, то неопределенный интеграл от α берется в обобщенных элементарных функциях, если и только если он однозначен на W.*

Доказательство. Интеграл от мероморфной формы имеет полиномиальный рост около полюсов формы. Поэтому если интеграл однозначен, то он является мероморфной функцией. В другую сторону утверждение вытекает из предыдущего следствия. □

Следствие 6.14 (ср. [53]). *Интеграл от ненулевой голоморфной формы никогда не берется в обобщенных элементарных функциях. Например, эллиптический интеграл $\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{\sqrt{P(t)}}$, где P — кубический полином без кратных корней, не элементарен.*

Доказательство. Интеграл от голоморфной формы однозначен, если и только если она равна нулю. □

Утверждение 6.15. *Пусть форма α имеет полюсы не выше первого порядка и все ее вычеты рациональны. Тогда неопределенный интеграл формы α берется в обобщенных элементарных функциях, если и только если все периоды формы $\frac{1}{2\pi i}\alpha$ рациональны.*

Доказательство. Необходимость условия рациональности периодов вытекает из следствия 6.12 настоящего пункта. Проверим их достаточность. По условию для некоторого натурального числа N все периоды формы $\frac{N\alpha}{2\pi i}$ являются целыми числами. Поэтому функция F, определенная равенством $F(x) = \exp\int_{x_0}^{x} N\alpha$, является однозначной функцией на W. Функция F мероморфна, так как форма α имеет лишь полюсы первого порядка. Равенство $\int_{x_0}^{x}\alpha = \frac{1}{N}\ln F(x) + c$ доказывает нужное утверждение. □

Следствие 6.16. *Пусть все вычеты мероморфной формы α рациональны. Тогда неопределенный интеграл формы α берется в обобщенных элементарных функциях, если и только если для формы α разрешима задача* 1 *и все периоды формы $\frac{1}{2\pi i}\alpha$ рациональны.*

Доказательство. Так как для формы α задача 1 разрешима, существует мероморфная функция A_0, такая что форма $(\alpha - dA_0)$ имеет лишь полюсы 1-го порядка. Форма $(\alpha - dA_0)$ имеет те же периоды, что и форма α, и к ней применимо утверждение 6.15. □

§ 7. Критерий Лиувилля—Мордухай-Болтовского

Лиувиллю принадлежит первый результат о неразрешимости линейных дифференциальных уравнений в явном виде (см. [29], [27]).

Теорема 7.1 (Лиувилля). *Уравнение $y'' + py' + qy = 0$ с коэффициентами из функционального дифференциального поля K, все элементы которого представимы в обобщенных квадратурах, решается в обобщенных квадратурах, если и только если оно имеет решение вида $y_1(x) = \exp\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, где f — функция, удовлетворяющая алгебраическому уравнению с коэффициентами в поле K.*

В одну сторону теорема очевидна. Если известно одно решение y_1 линейного дифференциального уравнения второго порядка, то его можно решить, понизив порядок уравнения. Доказать теорему в другую сторону достаточно трудно.

Потребовалось более полувека, чтобы обобщить теорему Лиувилля на уравнения n-го порядка. Мордухай-Болтовский доказал в 1910 г. методом Лиувилля следующий критерий, позволяющий сводить вопрос о разрешимости уравнения к вопросу о разрешимости другого уравнения меньшего порядка.

Критерий Лиувилля—Мордухай-Болтовского. *Уравнение n-го порядка*

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_ny=0$$

с коэффициентами из функционального дифференциального поля K, все элементы которого представимы в обобщенных квадратурах, решается в обобщенных квадратурах, если и только если, во-первых, оно имеет решение вида $y_1(x)=\exp\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, где f — функция, лежащая в некотором алгебраическом расширении K_1 поля K, и, во-вторых, дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка на функцию $z=y'-\frac{y_1'}{y_1}y$ с коэффициентами из поля K_1, полученное из исходного уравнения процедурой понижения порядка (см. п. 1.2 главы 3), *решается в обобщенных квадратурах над полем K_1.*

В том же 1910 году появилась теорема Пикара—Вессио, в которой вопрос о разрешимости линейных дифференциальных уравнений решается абсолютно по-другому, с точки зрения дифференциальной теории Галуа.

В третьей главе мы обсудим основные положения этой теории. Критерий Лиувилля—Мордухай-Болтовского по существу эквивалентен теореме Пикара—Вессио. Теория Пикара—Вессио не только объясняет этот критерий, но и дает возможность довести его до явного алгоритма, позволяющего для уравнения с коэффициентами из поля рациональных функций (имеющих рациональные коэффициенты) определить, разрешимо уравнение в обобщенных квадратурах или нет (см. [33] и § 7 главы 3).

Глава 2

РАЗРЕШИМОСТЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В РАДИКАЛАХ И ТЕОРИЯ ГАЛУА

Решается ли заданное алгебраическое уравнение в радикалах? Можно ли решать заданное алгебраическое уравнение степени n, используя решения вспомогательных алгебраических уравнений меньшей степени и радикалы? В этой главе мы обсуждаем, как теория Галуа (по крайней мере, в принципе) дает ответ на эти вопросы.

Сформулированные вопросы по своей природе являются чисто алгебраическими и могут быть поставлены над любым полем K. Мы будем предполагать, что поле K имеет нулевую характеристику. *В этой главе «поле» означает «поле характеристики нуль»*. Случай полей нулевой характеристики немного проще общего, а для нас основной интерес представляют функциональные дифференциальные поля, которые содержат все комплексные константы. Другие интересные примеры полей, к которым полностью применимы результаты этой главы, доставляют подполя поля комплексных чисел (в частности, поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$).

«Разрешительная» часть теории Галуа (см. § 1), позволяющая решать уравнение в радикалах, весьма проста. Она не использует ни основную теорему теории Галуа, ни вообще теорию полей и относится, по существу, к линейной алгебре. Только эти линейно-алгебраические соображения применяются в топологической теории Галуа при обсуждении вопроса о представимости алгебраических функций в радикалах. Однако достаточное условие разрешимости уравнения с помощью решения вспомогательных уравнений меньшей степени и радикалов опирается не только на линейную алгебру, но и на основную теорему теории Галуа. Это одна из причин, почему мы приводим полное доказательство основной теоремы теории Галуа.

Без доказательства используются хорошо известные свойства разрешимых групп и группы $S(k)$. В п. 9.1 доказывается значительно менее известное характеристическое свойство подгрупп группы $S(k)$. Эти факты из теории групп применяются как в обычной теории Галуа, так и в ее дифференциальном и топологическом вариантах.

Нам часто нужно расширять поле, присоединяя к нему один корень или несколько корней алгебраического уравнения. Для функциональных дифференциальных полей конструкция таких расширений проста и уже описана в § 2 главы 1. Для подполей поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ конструкция таких расширений очевидна. Так как нас в основном интересуют поля именно этих двух типов, *ниже мы будем использовать такие расширения, не останавливаясь на их конструкции*.

Несколько слов о расположении материала. В § 1–4 рассматривается поле P, на котором действует конечная группа автоморфизмов G. Элементы поля P, неподвижные относительно действия группы G, образуют подполе $K \subseteq P$, называемое полем инвариантов.

В § 1 показано, что если группа G разрешима, то элементы поля P представимы в радикалах через элементы поля инвариантов K. (Здесь надо дополнительно предполагать, что поле K содержит все корни из единицы степени, равной порядку n группы G.) В случае, когда P — поле рациональных функций от n переменных, G — группа перестановок n переменных и K — поле симметричных рациональных функций от n переменных, этот результат объясняет, почему уравнения 2–4-й степеней решаются в радикалах.

В § 2 показано, что для любой подгруппы G_0 группы G существует элемент $x \in P$, стационарная группа которого равна G_0. Результаты § 1 и 2 основаны на простых соображениях теории групп и используют явную формулу для интерполяционного полинома Лагранжа.

В § 3 показано, что всякий элемент поля P алгебраичен над полем K. Доказано, что если стационарная группа точки $z \in P$ содержит стационарную группу точки $y \in P$, то z является значением в точке y некоторого полинома над полем K. Это доказательство тоже основано на исследовании интерполяционного полинома Лагранжа (см. п. 3.3).

В § 4 введен класс k-разрешимых групп. Показано, что если группа G k-разрешима, то элементы поля P представимы в k-радикалах (т. е. представимы с использованием радикалов и решений вспомогательных уравнений степени не выше k) через элементы поля K. Здесь тоже нужно дополнительно предполагать, что поле K содержит все корни из единицы степени, равной порядку n группы G.

Рассмотрим теперь другую ситуацию. Пусть поле P получено из поля K присоединением всех корней полиномиального уравнения над полем K, имеющего лишь некратные корни. В этом случае существует конечная группа G автоморфизмов поля P, полем инвариантов которой является поле K. Для построения группы G исходное уравнение заменяется эквивалентным уравнением Галуа, т. е. уравнением, каждый корень которого выражается через любой другой из его корней (см. § 5). Группа автоморфизмов G строится в § 6.

Таким образом, в § 2, 3, 5 и 6 доказаны центральные теоремы теории Галуа. В § 7 подводится итог, формулируется и доказывается основная теорема теории Галуа.

Алгебраическое уравнение над некоторым полем решается в радикалах, если и только если его группа Галуа разрешима (§ 8), и решается в k-радикалах, если и только если его группа Галуа k-разрешима (§ 9). В § 10 обсуждается вопрос о разрешимости сложных алгебраических уравнений при помощи решения более простых уравнений. Здесь дается необходимое условие для подобной разрешимости в терминах группы Галуа уравнения.

В этой главе большое внимание уделено приложениям теории Галуа к задачам о разрешимости алгебраических уравнений в явном виде. Для построения самой теории Галуа эти приложения не нужны. Главные положения теории Галуа содержатся в § 2, 3, 5–7. Их можно читать отдельно.

Конструкция разрешения уравнений в радикалах (включающая решения общих уравнений степени 2–4) содержится в § 1 и не зависит от остального текста.

§ 1. Действие разрешимой группы и представимость в радикалах

В этом параграфе доказано, что если на поле P действует конечная разрешимая группа автоморфизмов G, то (при некоторых дополнительных предположениях о поле P) все элементы поля P выражаются через элементы поля инвариантов K при помощи радикалов и арифметических операций.

Конструкция представления элемента в радикалах основана на линейной алгебре (п. 1.1). В п. 1.2 результат применяется для доказательства разрешимости уравнений маленьких степеней. Чтобы написать явные формулы для решений, конструкцию из линейной алгебры нужно проделать явно. В п. 1.3 мы описываем технику резольвент Лагранжа, позволяющую явно диагонализировать конечную коммутативную группу линейных операторов. В п. 1.4 мы объясняем, как резольвенты Лагранжа помогают написать формулы для решений в радикалах уравнений 2–4-й степеней.

Результаты настоящего параграфа применимы в общей ситуации, рассматриваемой в теории Галуа. Если поле P получено из поля K присоединением всех корней алгебраического уравнения над полем K, имеющего лишь некратные корни, то существует группа G автоморфизмов поля P, полем инвариантов которой является поле K (п. 7.1). Эта группа называется *группой Галуа уравнения*. Из результатов настоящего параграфа вытекает, что уравнение, группа Галуа которого разрешима, решается в радикалах (достаточное условие разрешимости в радикалах из теоремы 8.7). Существование группы Галуа никак не самоочевидно и представляет собой один из центральных фактов теории Галуа. Здесь мы эту теорему не доказываем (доказательство имеется в п. 7.1), а изначально предполагаем, что группа G существует.

В ряде важных случаев группа G задана априори. Так, например, обстоит дело, если K — поле рациональных функций одной переменной, P — поле, полученное присоединением к K всех решений алгебраического уравнения, и G — группа монодромии алгебраической функции, определенной этим уравнением (см. главу 4).

1.1. Достаточное условие разрешимости в радикалах. Конструкция представления элемента в радикалах очень слабо использует то обстоятельство, что мы имеем дело с полями. Чтобы подчеркнуть это, мы опишем эту конструкцию, взяв вместо поля алгебру V, которая может быть и некоммутативной. (Нам даже не понадобится перемножать разные элементы этой алгебры. Мы будем использовать лишь операцию возведения в целую неотрицательную степень k и однородность этой операции относительно умножения на элементы основного поля $(\lambda a)^k = \lambda^k a^k$ при $a \in V$, $\lambda \in K$.)

Пусть V — алгебра над полем K, содержащим все корни из единицы. Конечная коммутативная группа линейных преобразований конечномерного векторного пространства над полем K в некотором базисе приводится к диагональному виду (см. п. 1.3).

Утверждение 1.1. *Пусть G — конечная коммутативная группа порядка n автоморфизмов алгебры V. Пусть поле K содержит все корни степени n из единицы. Тогда каждый элемент x алгебры V представи́м в виде суммы $k \leqslant n$ элементов $x_i \in V$, $i = 1, \ldots, k$, таких что x_i^n лежит в алгебре инвариантов V_0.*

Доказательство. Рассмотрим конечномерное векторное пространство L в алгебре V, натянутое на орбиту элемента x относительно действия группы G. Пространство L раскладывается в прямую сумму $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_k$ подпространств, собственных для всех операторов группы G (см. п. 1.3). Поэтому вектор x представи́м в виде суммы $x = x_1 + \ldots + x_k$ векторов $x_1, \ldots, x_k$, собственных для всех операторов группы. Собственные числа этих операторов — корни степени n из единицы. Поэтому элементы $x_1^n, \ldots, x_k^n$ принадлежат алгебре инвариантов V_0. $\square$

Введем следующее определение.

Определение. Скажем, что элемент x алгебры V получается *операцией извлечения корня n-й степени* из элемента a, если выполняется равенство $x^n = a$.

Теперь утверждение 1.1 можно интерпретировать следующим образом: каждый элемент x алгебры V представляется в виде суммы корней n-й степени из элементов алгебры инвариантов.

Теорема 1.2. *Пусть G — конечная разрешимая группа порядка n автоморфизмов алгебры V. Пусть поле K содержит все корни степени n из единицы. Тогда каждый элемент x алгебры V получается из элементов алгебры инвариантов V_0 при помощи извлечения корней и суммирований.*

Докажем сначала следующее простое утверждение о действии группы на множестве.

Пусть группа G действует на множестве X, H — нормальный делитель группы G и X_0 — подмножество X, состоящее из неподвижных точек относительно действия группы G.

Утверждение 1.3. *Подмножество X_H множества X, состоящее из неподвижных точек относительно действия нормального делителя H, инвариантно относительно действия группы G. На множестве X_H естественно действует факторгруппа G/H с неподвижным множеством X_0.*

Доказательство. Пусть $g \in G$ и $h \in H$. Тогда элемент $g^{-1}hg$ принадлежит нормальному делителю H. Пусть $x \in X_H$. Тогда $g^{-1}hg(x) =$

$=x$, или $h(gx)=g(x)$, что означает, что элемент $g\in X$ неподвижен при действии нормального делителя H. Итак, множество X_H инвариантно относительно действия группы G. При этом действии элементам нормального делителя H соответствуют тождественные преобразования. Поэтому действие группы G на X_H сводится к действию факторгруппы G/H. □

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.2.

Доказательство. Так как группа G разрешима, то у нее существует цепочка вложенных подгрупп $G=G_0\supset\ldots\supset G_m=e$, в которой группа G_m совпадает с единичным элементом e и при $i=1,\ldots,m$ группа G_i является нормальным делителем группы G_{i-1}, причем факторгруппа G_{i-1}/G_i коммутативна.

Обозначим через $V_0\subset\ldots\subset V_m=V$ цепочку подалгебр инвариантов алгебры V относительно действия групп $G_0,\ldots,G_m$. Согласно утверждению 1.3 коммутативная факторгруппа G_{i-1}/G_i естественно действует на алгебру инвариантов V_i, оставляя неподвижной подалгебру инвариантов V_{i-1}. Порядок m_i факторгруппы G_{i-1}/G_i является делителем порядка n группы G. Поэтому к этому действию применимо утверждение 1.1. Следовательно, каждый элемент алгебры V_i выражается при помощи суммирования и извлечения корней через элементы алгебры V_{i-1}. Последовательно повторяя это рассуждение, мы выразим каждый элемент алгебры V через элементы подалгебры V_0 цепочкой извлечения корней и суммирования. □

1.2. Группа перестановок переменных и уравнения 2–4-й степеней. Теорема 1.2 объясняет, почему уравнения маленькой степени решаются в радикалах.

Пусть алгебра V — кольцо многочленов от переменных $x_1,\ldots,x_n$ над полем K. Группа $S(n)$ перестановок n элементов действует на этом кольце, переставляя переменные $x_1,\ldots,x_n$ в многочленах из этого кольца. Алгебра инвариантов V_0 относительно этого действия состоит из симметричных многочленов. Каждый многочлен этой алгебры явным образом представляется в виде многочлена от $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$, где $\sigma_1=x_1+\ldots+x_n$, $\sigma_2=\sum\limits_{i<j}x_ix_j$, $\ldots$, $\sigma_n=x_1\ldots x_n$. Рассмотрим общее алгебраическое уравнение $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ степени n. Согласно формулам Виета коэффициенты этого уравнения с точностью до знака совпадают с основными симметриче-

скими функциями от его корней $x_1, \ldots, x_n$. Именно, $\sigma_1 = -a_1, \ldots, \sigma_n = (-1)^n a_n$.

При $n = 2, 3, 4$ группа $S(n)$ разрешима. Пусть поле K содержит все корни из единицы степени не выше 4. Применяя теорему 1.2, получаем, что каждый многочлен от $x_1, \ldots, x_n$ при $n \leqslant 4$ выражается через основные симметрические многочлены $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ при помощи извлечения корней, суммирования и умножения на рациональные числа. Поэтому *теорема* 1.2 *при* $n = 2, 3, 4$ *доказывает представимость корней уравнения степени* n *через коэффициенты уравнения при помощи извлечения корней, суммирования и умножения на рациональные числа*.

Чтобы получить явные формулы для корней этих уравнений, нужно повторить снова все рассуждения, делая все необходимые конструкции явно. Мы это сделаем в п. 1.3 и 1.4.

1.3. Полиномы Лагранжа и коммутативные матричные группы. Пусть T — полином степени n с единичным старшим коэффициентом над произвольным полем K. Пусть полином T имеет в поле K ровно n различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. С каждым корнем λ_i связан полином $T_i(t) = \frac{T(t)}{T'(\lambda_i)(t - \lambda_i)}$. Полином T_i — единственный полином степени не выше $n - 1$, равный единице в корне λ_i и обращающийся в нуль в остальных корнях полинома T. Пусть $c_1, \ldots, c_n$ — произвольная последовательность элементов поля K. Полином $L(t) = \sum c_i T_i(t)$ называется интерполяционным полиномом Лагранжа с узлами интерполирования $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и начальными данными $c_1, \ldots, c_n$. Это единственный полином степени не выше $n - 1$, принимающий в точке λ_i значение c_i при $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим векторное пространство V (возможно, бесконечномерное) над полем K и линейный оператор $A\colon V \to V$. Пусть оператор A удовлетворяет полиномиальному уравнению $T(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_{n-1} A + a_n E = 0$, где $a_i \in K$ и E — тождественный оператор. Допустим, что полином $T(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n$ имеет n различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ в поле K. Оператор $L_i = T_i(A)$, где $T_i(t) = \frac{T(t)}{T'(\lambda_i)(t - \lambda_i)}$, назовем *обобщенной резольвентой Лагранжа* оператора A, соответствующей корню λ_i. Для каждого вектора $x \in V$ вектор $x_i = L_i x$ будем называть обобщенной резольвентой Лагранжа (соответствующей корню λ_i) вектора x.

Утверждение 1.4. 1. *Обобщенные резольвенты Лагранжа L_i оператора A удовлетворяют следующим соотношениям*: $L_1+\ldots+L_n=E$, $L_iL_j=0$ *при* $i\neq j$, $L_i^2=L_i$, $AL_i=\lambda_iL_i$.

2. *Всякий вектор $x\in V$ представи́м в виде суммы своих обобщенных резольвент Лагранжа, т. е. $x=x_1+\ldots+x_n$. При этом ненулевые резольвенты x_i вектора x линейно независимы и являются собственными векторами оператора A с собственными числами λ_i.*

Доказательство. 1. Пусть $\Lambda=\{\lambda_i\}$ — множество корней полинома T. По определению полином T_i равен единице в точке $\lambda_i\in\Lambda$ и обращается в нуль в остальных точках этого множества. Очевидно, что на множестве Λ обращаются в нуль следующие полиномы: $T_1+\ldots+T_n-1$, T_iT_j при $i\neq j$, $T_i^2-T_i$, $tT_i-\lambda_iT_i$. Поэтому каждый из перечисленных полиномов делится на полином T, имеющий простые корни в точках множества Λ. Поскольку полином T аннулирует оператор A, т. е. $T(A)=0$, отсюда вытекают соотношения $L_1+\ldots+L_n=E$, $L_iL_j=0$ при $i\neq j$, $L_i^2=L_i$, $AL_i=\lambda_iL_i$.

2. Вторая часть утверждения является формальным следствием первой. Действительно, так как $E=L_1+\ldots+L_n$, то для всякого вектора x имеем $x=L_1x+\ldots+L_nx=x_1+\ldots+x_n$. Допустим, что вектор x_i не равен нулю и что некоторая линейная комбинация $\sum\mu_jx_j$ векторов $x_1,\ldots,x_n$ обращается в нуль. Тогда $0=L_i\sum\mu_jL_jx=\sum L_iL_j\mu_jx_j=\mu_ix_i$, т. е. ненулевой вектор x_i входит в линейную комбинацию с нулевым коэффициентом $\mu_i=0$. Из равенства $AL_i=\lambda_iL_i$ вытекает, что $AL_ix=\lambda_iL_ix$, т. е. что либо вектор $x_i=L_ix$ — собственный вектор оператора A с собственным числом λ_i, либо $x_i=0$. □

Приведенная явная конструкция разложения вектора x по собственным векторам оператора A автоматически переносится на случай нескольких коммутирующих операторов. Остановимся подробнее на случае двух коммутирующих операторов. Пусть в пространстве V кроме оператора A задан еще один линейный оператор $B\colon V\to V$, коммутирующий с оператором A и удовлетворяющий полиномиальному уравнению $Q(B)=B^k+b_1B^{k-1}+\ldots+b_{k-1}B+b_kE=0$, где $b_i\in K$. Допустим, что полином $Q(t)=t^k+b_1t^{k-1}+\ldots+b_{k-1}t+b_k$ имеет k различных корней $\mu_1,\ldots,\mu_k$ в поле K. С корнем μ_j связаны полином $Q_j(t)=Q(t)/Q'(\mu_j)(t-\mu_j)$ и оператор $Q_j(B)$ — обобщенная резольвента Лагранжа оператора B, соответствующая корню μ_j. Оператор $L_{i,j}=T_i(A)Q_j(B)$ назовем обобщенной резольвентой Лагранжа операторов A и B, соответствующей паре корней λ_i,μ_j.

Вектор $x_{i,j}=L_{i,j}x$ будем называть обобщенной резольвентой Лагранжа вектора $x \in V$ (соответствующей паре корней λ_i и μ_j) относительно операторов A и B.

Утверждение 1.5. 1. *Обобщенные резольвенты Лагранжа $L_{i,j}$ коммутирующих операторов A и B удовлетворяют следующим соотношениям*: $\sum L_{i,j}=E$, $L_{i_1,j_1}L_{i_2,j_2}=0$ *при* $(i_1, j_1)\neq(i_2, j_2)$, $L^2_{i,j}=L_{i,j}$, $AL_{i,j}=\lambda_i L_{i,j}$, $BL_{i,j}=\mu_j L_{i,j}$.

2. *Всякий вектор $x \in V$ представи́м в виде суммы своих обобщенных резольвент Лагранжа, т. е. $x=\sum x_{i,j}$. При этом ненулевые резольвенты $x_{i,j}$ вектора x линейно независимы и являются собственными векторами операторов A и B с собственными числами λ_i и μ_j соответственно.*

Для доказательства первой части утверждения достаточно перемножить соответствующие соотношения для обобщенных резольвент операторов A и B. Вторая часть утверждения является формальным следствием первой части.

Применим доказанные утверждения для оператора A конечного порядка n, $A^n=E$. Обобщенные резольвенты Лагранжа для таких операторов особенно важны для решения уравнений в радикалах. Именно эти резольвенты были открыты Лагранжем, и мы будем называть их *резольвентами Лагранжа* (опуская слово «обобщенными»). Пусть поле K содержит n корней $\xi_1, \ldots, \xi_n$ степени n из единицы, $\xi_i^n=1$. По условию $T(A)=0$, где $T(t)=t^n-1$. Вычислим резольвенту Лагранжа, соответствующую корню $\xi_i=\xi$. Имеем

$$T_i(t)=\frac{t^n-\xi^n}{n\xi^{n-1}(t-\xi)}=\frac{1}{n\xi^{n-1}}(t^{n-1}+\ldots+\xi^{n-1})=\frac{1}{n}((\xi^{-1}t)^{n-1}+\ldots+1).$$

Резольвенту Лагранжа $T_i(A)$ оператора A, соответствующую корню $\xi_i=\xi$, будем обозначать $R_\xi(A)$. Получаем $R_\xi(A)=\frac{1}{n}\sum\limits_{0\leqslant k<n}\xi^{-k}A^k$.

Следствие 1.6. *Рассмотрим векторное пространство V над полем K, содержащим все корни степени n из единицы. Пусть оператор $A\colon V\to V$ удовлетворяет уравнению $A^n=E$. Тогда для всякого вектора $x\in V$ его резольвента Лагранжа $R_\xi(A)(x)$ либо равна нулю, либо является собственным вектором оператора A с собственным числом ξ. Вектор x является суммой всех своих резольвент Лагранжа.*

Замечание. Справедливость следствия 1.6 легко проверить непосредственно, не ссылаясь на предыдущие утверждения.

Пусть G — конечная коммутативная группа линейных операторов на векторном пространстве V над полем K. Обозначим через n порядок группы G. Пусть поле K содержит все корни степени n из единицы. Тогда пространство V является прямой суммой подпространств, собственных для всех операторов группы G. Уточним это утверждение. Пусть группа G является прямой суммой k циклических групп порядков $m_1, \ldots, m_k$. Пусть операторы $A_1 \in G, \ldots, A_k \in G$ порождают эти циклические подгруппы. В частности, $A_1^{m_1} = E, \ldots, A_k^{m_k} = E$. Для всякого набора $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ корней из единицы степеней $m_1, \ldots, m_k$ рассмотрим *совместную резольвенту Лагранжа* $L_\lambda = L_{\lambda_1}(A_1) \ldots L_{\lambda_k}(A_k)$ образующих $A_1, \ldots, A_k$ группы G.

Следствие 1.7. *Всякий вектор $x \in V$ представи́м в виде $x = \sum L_\lambda x$. Каждый из векторов $L_\lambda x$ — либо нуль, либо общий собственный вектор операторов $A_1, \ldots, A_k$ с собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.*

1.4. Решение в радикалах уравнений 2–4-й степеней. В этом пункте мы снова вернемся к уравнениям маленьких степеней (см. п. 1.2). Мы воспользуемся техникой резольвент Лагранжа и объясним, как довести схему решения уравнений из п. 1.2 до явных формул. Сами формулы при этом мы выписывать не будем. Здесь используются обозначения из п. 1.2, 1.3. Резольвенты Лагранжа операторов мы будем нумеровать собственными числами этих операторов. Совместные резольвенты Лагранжа пар операторов мы будем нумеровать парами собственных чисел этих операторов.

Уравнение второй степени. На кольце многочленов $K[x_1, x_2]$ линейно действует группа $S(2) = \mathbb{Z}_2$ перестановок двух элементов. Она состоит из тождественного преобразования и оператора второго порядка. Элемент x_1 относительно действия этого оператора имеет две резольвенты Лагранжа:

$$R_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}\sigma_1,$$
$$R_{-1} = \frac{1}{2}(x_1 - x_2).$$

Квадрат резольвенты Лагранжа R_{-1} является симметрическим многочленом. Имеем

$$R_{-1}^2 = \frac{1}{4}((x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2) = \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - 4\sigma_2).$$

Получаем представление полинома x_1 через симметрические многочлены $x_1 = R_1 + R_{-1} = \frac{\sigma_1 \pm \sqrt{\sigma_1^2 - 4\sigma_2}}{2}$, что и дает обычную форму решения квадратного уравнения.

Уравнение третьей степени. Предположим, что поле K содержит все три кубических корня из единицы. На кольце многочленов $K[x_1, x_2, x_3] = V$ действует группа $S(3)$ перестановок трех элементов. Группа $S(3)$ имеет нормальным делителем знакопеременную группу $A(3)$, которая является циклической группой порядка 3. Группа $A(3)$ порождена оператором B, задающим перестановку x_2, x_3, x_1 переменных x_1, x_2, x_3. Факторгруппа $S(3)/A(3)$ является циклической группой порядка 2. Обозначим через V_1 кольцо инвариантов группы $A(3)$ (которое состоит из многочленов, не меняющихся при четных перестановках переменных) и через V_2 — алгебру симметрических многочленов. Элемент x_1 имеет три резольвенты Лагранжа относительно оператора B, порождающего группу $A(3)$:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \\ R_{\xi_1} &= \frac{1}{3}(x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_2^2 x_3), \\ R_{\xi_2} &= \frac{1}{3}(x_1 + \xi_1 x_2 + \xi_1^2 x_3), \end{aligned}$$

где $\xi_1, \xi_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ — неединичные кубические корни из единицы.

Имеем $x_1 = R_1 + R_{\xi_1} + R_{\xi_2}$, и R_1^3, $R_{\xi_1}^3$, $R_{\xi_2}^3$ лежат в алгебре V_1. Более того, резольвента R_1 является симметрическим многочленом, а полиномы $R_{\xi_1}^3$ и $R_{\xi_2}^3$ переставляются друг с другом при действии группы $\mathbb{Z}_2 = S(3)/A(3)$ на кольце V_1. Повторяя для полиномов $R_{\xi_1}^3$ и $R_{\xi_2}^3$ конструкцию, которую мы использовали при решении квадратного уравнения, получим, что эти полиномы выражаются через симметрические полиномы $R_{\xi_1}^3 + R_{\xi_2}^3$ и $(R_{\xi_1}^3 - R_{\xi_2}^3)^2$. Окончательно получаем, что многочлен x_1 выражается через симметрические многочлены $R_1 \in V_2$, $(R_{\xi_1}^3 + R_{\xi_2}^3) \in V_2$ и $(R_{\xi_1}^3 - R_{\xi_2}^3)^2 \in V_2$ при помощи извлечения корней второй и третьей степени и при помощи арифметических операций. Для написания явной формулы для решения осталось лишь выразить эти симметрические многочлены через основные симметрические многочлены.

Уравнение четвертой степени. Причина разрешимости уравнений четвертой степени заключается в разрешимости группы $S(4)$.

Группа $S(4)$ разрешима, потому что существует гомоморфизм $\pi\colon S(4) \to S(3)$, ядром которого является коммутативная группа $Kl = \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2$. Гомоморфизм π описывается следующим образом. Существует ровно три способа разбить множество, содержащее четыре элемента, на два подмножества, содержащие по паре элементов. Каждой перестановке множества из четырех элементов соответствует перестановка этих трех разбиений. Описанное соответствие и задает гомоморфизм π. Ядро Kl этого гомоморфизма — нормальный делитель группы $S(4)$, состоящий из четырех перестановок: тождественной перестановки и трех перестановок, каждая из которых является произведением транспозиций двух непересекающихся пар элементов.

Предположим, что поле K содержит все три кубических корня из единицы. На кольце полиномов $K[x_1, x_2, x_3, x_4] = V$ действует группа $S(4)$. Обозначим через V_1 подкольцо инвариантов нормального делителя Kl группы $S(4)$. Итак, на кольце $V = K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ действует коммутативная группа Kl с кольцом инвариантов V_1. На кольце V_1 действует разрешимая группа $S(3) = S(4)/Kl$, и алгеброй инвариантов относительно этого действия является кольцо V_2 симметрических многочленов.

Пусть A и B — операторы, соответствующие перестановкам x_2, x_1, x_4, x_3 и x_3, x_4, x_1, x_2 переменных x_1, x_2, x_3, x_4. Операторы A и B порождают группу Kl. Справедливы тождества $A^2 = B^2 = E$. Корни полинома $T(t) = t^2 - 1$, аннулирующего операторы A и B, равны $+1, -1$. Группа Kl является суммой двух экземпляров группы из двух элементов, первое слагаемое порождено оператором A, второе — оператором B.

Элемент x_1 имеет четыре резольвенты Лагранжа относительно действия коммутирующих операторов A, B, порождающих группу Kl:

$$\begin{aligned}
R_{1,1} &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),\\
R_{-1,1} &= \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4),\\
R_{1,-1} &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4),\\
R_{-1,-1} &= \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4).
\end{aligned}$$

Элемент x_1 равен сумме этих резольвент: $x_1 = R_{1,1} + R_{-1,1} + R_{1,-1} + R_{-1,-1}$, и квадраты $R^2_{1,1}$, $R^2_{-1,1}$, $R^2_{1,-1}$ и $R^2_{-1,-1}$ резольвент Лагранжа принадлежат алгебре V_1. Поэтому x_1 при помощи арифметических операций и извлечения квадратных корней выражается через элементы алгебры V_1. В свою очередь, элементы алгебры V_1 выражаются через симметрические многочлены, так как на этой алгебре действует группа $S(3)$ с алгеброй инвариантов V_2 (см. выше решение кубических уравнений).

Покажем, что приведенное выше рассуждение дает явное своде́ние уравнения четвертой степени к кубическому уравнению. Действительно, резольвента $R_{1,1} = \frac{1}{4}\sigma_1$ является симметрическим многочленом, а квадраты резольвент $R_{-1,1}$, $R_{1,-1}$ и $R_{-1,-1}$ переставляются между собой при действии группы $S(4)$ (см. выше описание гомоморфизма $\pi\colon S(4)\to S(3)$). Так как элементы $R^2_{-1,1}$, $R^2_{1,-1}$, $R^2_{-1,-1}$ лишь переставляются, то основные симметрические многочлены от них инвариантны относительно действия группы $S(4)$ и принадлежат кольцу V_2. Итак, многочлены

$$
\begin{aligned}
b_1 &= R^2_{-1,1} + R^2_{1,-1} + R^2_{-1,-1},\\
b_2 &= R^2_{-1,1}R^2_{1,-1} + R^2_{1,-1}R^2_{-1,-1} + R^2_{-1,-1}R^2_{-1,1},\\
b_3 &= R^2_{-1,1}R^2_{1,-1}R^2_{-1,-1}
\end{aligned}
$$

являются симметрическими многочленами от x_1, x_2, x_3 и x_4, следовательно, b_1, b_2 и b_3 явно выражаются через коэффициенты уравнения

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0. \tag{4}$$

Чтобы решить уравнение (4), достаточно составить и решить уравнение

$$r^3 - b_1r^2 + b_2r - b_3 = 0 \tag{5}$$

и положить $x = \frac{1}{4}(-a_1 + \sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3})$, где r_1, r_2 и r_3 — корни уравнения (5).

В заключение приведем еще одно красивое явное своде́ние уравнения четвертой степени к уравнению третьей степени, основанное на рассмотрении пучка плоских квадрик [11].

Координаты точек пересечения двух плоских квадрик $P = 0$ и $Q = 0$, где P и Q — заданные полиномы второй степени от x и y, можно найти, решая одно кубическое и несколько квадратных уравнений. Действительно, каждая квадрика пучка $P + \lambda Q = 0$, где λ — произвольный параметр, проходит через искомые точки. При некотором значении λ_0 параметра λ квадрика $P + \lambda Q = 0$ распадается на пару прямых. Это значение удовлетворяет кубическому уравнению $\det(\widetilde{P} + \lambda\widetilde{Q}) = 0$, где $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ — (3×3)-матрицы квадратичных форм, соответствующих уравнениям квадрик в однородных координатах. Уравнения каждой из двух прямых, составляющих квадрику $P + \lambda_0 Q = 0$, можно найти, решая квадратное уравнение: каждая такая прямая проходит через центр симметрии квадрики, координаты которого выражаются через коэффициенты квадрики при помощи арифметических операций, и через одну из точек пересечения квадрики с любой фиксированной прямой. Для нахождения координат этой точки нужно решить квадратное уравнение. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, находится с помощью арифметических операций. Если известны уравнения прямых, на которые распадается квадрика $P + \lambda_0 Q = 0$, то для нахождения искомых точек остается лишь решить квадратные уравнения для точек пересечения квадрики $P = 0$ и каждой из двух прямых, составляющих квадрику.

Поэтому общее уравнение четвертой степени с помощью арифметических операций и извлечения квадратных корней сводится к кубическому уравнению. Действительно, корни уравнения $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ являются проекциями на ось x точек пересечения квадрик $y = x^2$ и $a_0y^2 + a_1xy + a_2y + a_3x + a_4 = 0$.

§ 2. Неподвижные точки действия конечной группы и ее подгрупп

Здесь доказывается одна из центральных теорем теории Галуа, согласно которой различные подгруппы конечной группы автоморфизмов поля имеют различные поля инвариантов. Доказательство опирается на простую явную конструкцию, использующую интерполяционный полином Лагранжа, и на геометрически очевидное утверждение, согласно которому векторное пространство нельзя покрыть конечным числом подпространств.

Начнем с геометрического утверждения. Пусть V — аффинное пространство (может быть, бесконечномерное) над некоторым полем.

Утверждение 2.1. *Пространство V не может быть представлено в виде объединения конечного числа своих собственных аффинных подпространств.*

Доказательство. Применим индукцию по числу аффинных подпространств. Пусть утверждение доказано для объединения менее чем n собственных аффинных подпространств. Допустим, что пространство V представимо в виде объединения n собственных аффинных подпространств $V_1, \ldots, V_n$. Рассмотрим любую собственную аффинную гиперплоскость $\hat{V}$ в пространстве V, содержащую первое из этих подпространств V_1. Пространство V является объединением бесконечного семейства непересекающихся аффинных гиперплоскостей, параллельных гиперплоскости $\hat{V}$. Не более чем n гиперплоскостей этого семейства содержат одно из пространств $V_1, \ldots, V_n$. Возьмем любую другую гиперплоскость из семейства. К этой гиперплоскости и ее пересечениям с аффинными плоскостями $V_2, \ldots, V_n$ применимо индукционное предположение, что и доказывает утверждение. □

Следствие 2.2. *Пусть на векторном пространстве V действует конечная группа линейных преобразований. Тогда найдется вектор a, на орбите которого группа действует свободно.*

Доказательство. Множество неподвижных точек линейного преобразования является векторным подпространством. Для нетождественного линейного преобразования это подпространство является собственным. В качестве вектора a достаточно взять любой вектор, не принадлежащий объединению неподвижных подпространств нетривиальных преобразований группы. □

Стационарной подгруппой $G_a \subset G$ вектора $a \in V$ называется подгруппа, состоящая из всех элементов $g \in G$, оставляющих вектор a неподвижным, т. е. таких, что $g(a) = a$.

Вообще говоря, не каждая подгруппа G_0 конечной группы G линейных преобразований является стационарной подгруппой некоторого вектора a. В качестве примера достаточно рассмотреть циклическую группу линейных преобразований комплексной прямой, порожденную оператором умножения на первообразный корень степени n из единицы. Если число n не является простым, то эта циклическая группа имеет нетривиальную подгруппу, но стационарные подгруппы всех элементов тривиальны (тождественная подгруппа для каждого элемента $a \neq 0$ и вся циклическая группа для $a = 0$). Таким образом, существование вектора a, неподвижного лишь для преобразований из подгруппы G_0, не очевидно и верно не для всех представлений группы G.

Лемма 2.3. *Пусть G_a и G_b — стационарные подгруппы векторов a и b некоторого векторного пространства V. Тогда в подпространстве L, порожденном векторами a и b, существует вектор c, стационарная группа G_c которого равна $G_a \cap G_b$.*

Доказательство. Подгруппа $G_a \cap G_b$ оставляет неподвижными все векторы подпространства L. Однако каждый элемент $g \notin G_a \cap G_b$ нетривиально действует либо на вектор a, либо на вектор b. Векторы из L, неподвижные относительно действия фиксированного элемента $g \notin G_a \cap G_b$, образуют собственное подпространство в L. По утверждению 2.1 такие подпространства не могут покрыть все пространство L. □

Пусть G — некоторая группа автоморфизмов поля P. Неподвижные элементы относительно действия группы G образуют подполе, которое мы обозначим через K. Поле P можно рассматривать как векторное пространство над полем K.

В теории Галуа важную роль играет следующая теорема.

Теорема 2.4. *Пусть G — некоторая конечная группа автоморфизмов поля P. Тогда для всякой подгруппы G_0 группы G существует элемент $x \in P$, стационарная подгруппа которого совпадает с подгруппой G_0.*

Для доказательства удобно воспользоваться пространством полиномов $P[t]$ с коэффициентами из поля P. Каждый элемент f пространства $P[t]$ имеет вид $f = a_0 + \ldots + a_m t^m$, где $a_0, \ldots, a_m \in P$. Полином $f \in P[t]$ задает отображение $f : P \to P$, переводящее точку $x \in P$ в точку $f(x) = a_0 + \ldots + a_m x^m$. Каждому автоморфизму σ поля P соответствует индуцированный автоморфизм кольца $P[t]$, переводящий полином $f = a_0 + \ldots + a_m t^m$ в полином $f^\sigma = \sigma(a_0) + \ldots + \sigma(a_m) t^m$. Для каждого элемента $x \in P$ справедливо тождество $f^\sigma(\sigma x) = \sigma(f(x))$. Итак, группа автоморфизмов G поля P действует на кольце $P[t]$. Для всякого $k \geqslant 0$ пространство $P_k[t]$ полиномов степени не выше k инвариантно относительно этого действия.

Лемма 2.5. *Пусть группа автоморфизмов G поля P содержит m элементов. Тогда для всякой подгруппы G_0 группы G существует полином f степени, меньшей чем m, стационарная подгруппа которого совпадает с подгруппой G_0.*

Доказательство. Действительно, согласно следствию 2.2 существует элемент $a \in P$, на орбите O которого группа G действует свободно. В частности, орбита O содержит ровно m элементов.

Пусть подгруппа G_0 содержит k элементов. Тогда в группе G есть $q=m/k$ правых классов смежности по подгруппе G_0. Под действием подгруппы G_0 множество O разбивается на q орбит O_j, $j=1,\ldots,q$. Фиксируем q попарно различных элементов $b_1,\ldots,b_q$ поля инвариантов K и построим полином Лагранжа f степени меньше m, принимающий на всех элементах множества O_j значение b_j для $j=1,\ldots,q$. Полином f удовлетворяет условиям леммы.

Действительно, полином f инвариантен относительно автоморфизма σ, если и только если для каждого элемента x поля P выполняется равенство $f(\sigma(x))=\sigma(f(x))$. Так как полином f имеет степень меньше m и множество O содержит m элементов, то равенство достаточно проверить для всех элементов x множества O. По построению полинома f на всех элементах множества O выполняется равенство $f(\sigma(x))=\sigma(f(x))$, если и только если $\sigma\in G_0$. □

Вернемся к доказательству теоремы. Рассмотрим полином $f = a_0+\ldots+a_{m-1}t^{m-1}$, стационарная подгруппа которого равна G_0. Пересечение стационарных подгрупп коэффициентов $a_0,\ldots,a_{m-1}$ этого полинома совпадает с подгруппой G_0. Рассмотрим векторное пространство L над полем $K\subset P$ инвариантов относительно действия группы G, натянутое на коэффициенты $a_0,\ldots,a_{m-1}$. Согласно лемме 2.3 существует вектор $c\in L$, стационарная подгруппа которого равна G_0. □

§ 3. Автоморфизмы поля и соотношения между его элементами

В этом параграфе рассматривается конечная группа автоморфизмов поля. Доказываются две следующие теоремы теории Галуа.

Первая теорема (п. 3.2) утверждает, что каждый элемент поля алгебраичен над полем инвариантов.

Пусть y и z — два элемента поля. При каких условиях существует полином T с коэффициентами из поля инвариантов, такой что $z=T(y)$? Вторая теорема (п. 3.4) утверждает, что полином T существует, если и только если стационарная группа элемента y принадлежит стационарной группе элемента z.

3.1. Уравнения с некратными корнями. Пусть $T(t)$ — полином над полем K, $T'(t)$ — его производная, $D(t)$ — наибольший общий делитель этих полиномов и $\widetilde{T}$ — полином, определенный формулой $\widetilde{T}=T/D$.

Утверждение 3.1. 1. *Корень кратности $k>0$ полинома $T(t)$ является корнем кратности $k-1$ полинома D.*

2. *Полином $\widetilde{T}$ имеет те же корни, что и полином T, причем все корни полинома $\widetilde{T}$ некратны.*

Доказательство. Пусть $T(t)=(t-x)^kQ(t)$ и $Q(x)\neq 0$. Тогда $T'(t)=k(t-x)^{k-1}Q(t)+(t-x)^kQ'(t)$. Отсюда следуют оба пункта утверждения 3.1. □

Пусть мы хотим расширить некоторое поле K, добавив к нему один или несколько корней полинома T над полем K. Заменяя, если надо, полином T на полином $\widetilde{T}$, можно не ограничивая общности считать, что все корни полинома простые.

3.2. Алгебраичность над полем инвариантов. Пусть P — коммутативная алгебра без делителей нуля, на которой действует группа автоморфизмов π, и K — подалгебра инвариантов. Мы не предполагаем, что группа π конечна (хотя для теории Галуа достаточно рассматривать лишь действия конечных групп).

Теорема 3.2. 1. *Стационарная подгруппа элемента $y\in P$, алгебраического над K, имеет конечный индекс в группе π.*

2. *Если стационарная подгруппа элемента $y\in P$ имеет индекс n в группе π, то y удовлетворяет над K неприводимому уравнению степени n с равным единице старшим коэффициентом.*

Доказательство. 1. Допустим, что элемент y удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$p_0y^n+\ldots+p_n=0 \tag{6}$$

с коэффициентами p_i из алгебры инвариантов K. Тогда всякий автоморфизм алгебры P, оставляющий на месте элементы алгебры K, переводит элемент y в один из корней уравнения (6), а этих корней не более чем n, поэтому индекс в группе π стационарной подгруппы элемента y не превосходит n.

2. Пусть стационарная подгруппа G элемента y имеет индекс n в группе π. Тогда орбита элемента y относительно действия группы π содержит ровно n различных элементов. Обозначим через $y_1, \ldots, y_n$ элементы этой орбиты. Пусть $\sigma_1=y_1+\ldots+y_n$, $\sigma_2=\sum\limits_{i<j} y_iy_j$,

$\ldots$, $\sigma_n = y_1 \ldots y_n$ — основные симметрические функции от элементов орбиты. Элементы $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ не меняются при перестановке точек $y_1, \ldots, y_n$ и принадлежат поэтому алгебре инвариантов K. Элемент y удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$T(y) = y^n - \sigma_1 y^{n-1} + \sigma_2 y^{n-2} + \ldots + (-1)^n \sigma_n = 0.$$

Это уравнение неприводимо (т. е. полином T не раскладывается в произведение двух полиномов положительных степеней, коэффициенты которых лежат в алгебре K). Действительно, если оно приводимо, то y удовлетворяет уравнению меньшей степени над алгеброй K и орбита элемента y содержит меньше чем n элементов. □

3.3. Подалгебра, содержащая коэффициенты полинома Лагранжа. В этом пункте рассматривается полином Лагранжа, построенный по специальным начальным данным, и оценивается подалгебра, содержащая его коэффициенты. Результаты применяются в п. 3.4.

Пусть P — коммутативная алгебра без делителей нуля, $y_1, \ldots, y_n$ — различные элементы алгебры P и $Q \in P[y]$ — полином степени n с единичным старшим коэффициентом, обращающийся в нуль в точках $y_1, \ldots, y_n$, т. е. $Q(y) = (y - y_1) \ldots (y - y_n)$. Рассмотрим следующую задачу. Для заданных элементов $z_1, \ldots, z_n$ алгебры P найти полином Лагранжа T, принимающий в точках y_i значения $z_i Q'(y_i)$. (По определению полином Q имеет некратные корни, т. е. $Q'(y_i) \neq 0$, и степень полинома Лагранжа T меньше n.) Для формулировки ответа удобно воспользоваться рациональной функцией F, заданной тождеством $F(y) = \sum \frac{z_i}{y - y_i}$. Из явной формулы для полинома Лагранжа вытекает следующее утверждение.

Утверждение 3.3. *Искомый полином Лагранжа T равен произведению QF полинома Q на рациональную функцию F. Коэффициенты полинома T принадлежат алгебре P, т. е. $T \in P[y]$.*

Замечание. При $P = \mathbb{C}$ задача допускает следующую переформулировку: найти полином T степени меньше n, такой что 1-форма $\omega = T \frac{dy}{Q}$ имеет в точках $y_1, \ldots, y_n$ вычеты $z_1, \ldots, z_n$. Ясно, что форма ω равна $F(y)\, dy$. Поэтому $T = QF$.

Нам понадобится другая формула для полинома T, позволяющая точнее оценить подалгебру, содержащую его коэффициенты. Введем нужные обозначения. Для $k=0, 1, \ldots$ положим $m_k=\sum z_i y_i^k$. Обозначим через M полином от переменной y^{-1}, равный $\sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k y^{-1-k}$. Представим произведение полиномов Q и M от переменных y и y^{-1} в виде $QM=L+L_-$, где L и L_- — суммы мономов полинома Лорана $QM\in K[y, y^{-1}]$, имеющих соответственно неотрицательные степени и строго отрицательные степени по переменной y.

Утверждение 3.4. *Полином T совпадает с определенным выше полиномом L.*

Доказательство. В кольце формальных рядов Тейлора по степеням переменной y^{-1} с коэффициентами в алгебре P выполняются следующие равенства:

$$F(y)=y^{-1}\sum_{i=1}^{n} z_i(1-y_i y^{-1})^{-1}=y^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} z_i y_i^k y^{-k}=y^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} m_k y^{-k}.$$

(Если $P=\mathbb{C}$, то выписанный ряд является рядом Тейлора рациональной функции F в точке ∞.) В кольце формальных рядов Лорана по переменной y^{-1} с коэффициентами в алгебре P выполняется равенство $T(y)=Q(y)y^{-1}\sum\limits_{i=0}^{\infty} m_k y^{-k}$, из которого следует, что $T=L$. $\square$

Из утверждения 3.4 вытекает такое следствие.

Следствие 3.5. *Пусть подалгебра K алгебры P содержит коэффициенты полинома Q и элементы $m_0, \ldots, m_{n-1}$, где $m_k=\sum z_i y_i^k$. Тогда коэффициенты полинома T принадлежат подалгебре K, т. е. $T\in K[y]$.*

3.4. Представимость одного элемента через другой над полем инвариантов. Пусть P — поле, на котором действует группа автоморфизмов π, и K — поле инвариантов. Пусть y и z — элементы поля P, алгебраические над полем K, и G_y, G_z — их стационарные подгруппы. Согласно теореме 3.2 элемент y (элемент z) алгебраичен над полем K, если и только если группа G_y (группа G_z) имеет конечный индекс в группе π. При каком условии z принадлежит расширению $K(y)$ поля K элементом y? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3.6. *Элемент z принадлежит полю $K(y)$, если и только если стационарная подгруппа G_z элемента z содержит стационарную подгруппу G_y элемента y.*

Доказательство. В одну сторону теорема очевидна: каждый элемент поля $K(y)$ неподвижен при действии группы G_y. Другими словами, стационарная подгруппа каждого элемента поля $K(y)$ содержит группу G_y.

Обратное утверждение мы докажем в более сильной форме. Ослабим предположения в теореме 3.6. Будем предполагать, что P — коммутативная алгебра без делителей нуля (необязательно являющаяся полем), π — группа автоморфизмов алгебры P, K — алгебра инвариантов, y и z — элементы алгебры P, стационарные подгруппы G_y и G_z которых имеют конечный индекс в группе π. Обозначим через Q неприводимое целое алгебраическое уравнение над алгеброй K, которому удовлетворяет элемент y, $Q(y)=0$ (см. п. 2 теоремы 3.2). □

Утверждение 3.7. *Если $G_z \supseteq G_y$, то существует полином T с коэффициентами в алгебре K, для которого выполняется тождество $zQ'(y)=T(y)$.*

Доказательство. Обозначим через S множество правых классов смежности группы π по подгруппе G_y. Пусть множество S содержит n элементов. Занумеруем элементы $s_1, \ldots, s_n$ этого множества, присвоив классу единичного элемента группы π номер 1. Пусть g_i — любой представитель класса s_i в группе π. Образы $g_i(y), g_i(z)$ элементов y, z при действии автоморфизма $g_i \in \pi$ не зависят от выбора элемента g_i в классе s_i. Обозначим эти образы через y_i и z_i соответственно. Все элементы $y_1, \ldots, y_n$ различны по построению, в то время как некоторые из элементов $z_1, \ldots, z_n$ могут совпадать. Для всякого целого неотрицательного k элемент $m_k = z_1 y_1^k + \ldots + z_n y_n^k$ инвариантен относительно действия группы π и, следовательно, принадлежит алгебре K. Для завершения доказательства осталось сослаться на следствие 3.5. Утверждение 3.7 и теорема 3.6 доказаны. □

§ 4. Действие k-разрешимой группы и представимость в k-радикалах

В этом параграфе рассматривается поле P, на котором действует конечная группа автоморфизмов G с полем инвариантов K. Мы будем предполагать, что поле P содержит все корни из единицы. Вводится определение k-разрешимой группы. Мы докажем, что если группа G k-разрешима, то каждый элемент поля P выражается через элементы поля K с помощью радикалов и решения вспомогательных алгебраических уравнений, степень которых не превосходит k. Доказательство опирается на теоремы из предыдущих пунктов.

Определение. Конечная группа G называется *k-разрешимой*, если у нее существует цепочка подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n = e,$$

в которой для каждого i, $0 < i \leqslant n$, либо индекс подгруппы G_i в группе G_{i-1} не превосходит k, либо подгруппа G_i — нормальный делитель в группе G_{i-1} и факторгруппа G_{i-1}/G_i коммутативна.

Теорема 4.1. *Пусть G — конечная k-разрешимая группа автоморфизмов поля P, содержащего все корни из единицы. Тогда каждый элемент x поля P выражается через элементы поля инвариантов K при помощи арифметических операций, извлечения корней и решения алгебраических уравнений степени не выше чем k.*

Доказательство. Пусть $G = G_0 \supset \ldots \supset G_m = e$ — цепочка вложенных подгрупп, удовлетворяющая условиям, перечисленным в определении k-разрешимой группы. Обозначим через $K = K_0 \subset \ldots \subset K_m = P$ цепочку полей, инвариантных относительно действия групп $G_0, \ldots, G_m$.

Пусть группа G_i является нормальным делителем группы G_{i-1}, и факторгруппа G_{i-1}/G_i коммутативна. Коммутативная факторгруппа G_{i-1}/G_i естественно действует на поле инвариантов K_i, оставляя неподвижным поле инвариантов K_{i-1}. Следовательно, каждый элемент поля K_i выражается при помощи суммирования и извлечения корней через элементы поля K_{i-1} (см. теорему 1.2 из п. 1.1).

Пусть группа G_i является подгруппой индекса $m \leqslant k$ в группе G_{i-1}. Существует элемент $a \in P$, стационарная подгруппа которого равна G_i (теорема 2.4). На поле K действует группа автоморфизмов G_{i-1} с полем инвариантов K_{i-1}. Так как индекс стационарной подгруппы G_i элемента a в группе G_{i-1} равен m, то элемент a удовлетворяет алгебраическому уравнению степени $m \leqslant k$ над полем K_{i-1}. Согласно теореме 3.6 каждый элемент поля K_i является полиномом от a с коэффициентами из поля K_{i-1}.

Последовательно повторяя эти рассуждения, мы выразим каждый элемент поля P через элементы поля K с помощью арифметических операций, извлечения корней и решения алгебраических уравнений степени не выше k. □

§ 5. Уравнения Галуа

Алгебраическое уравнение над полем K называется *уравнением Галуа,* если расширение поля K, полученное присоединением к K любого одного корня этого уравнения, содержит все остальные его корни. В этом параграфе доказывается, что для любого алгебраического уравнения над полем K существует уравнение Галуа, для которого расширение поля K, полученное присоединением всех корней исходного уравнения, совпадает с расширением, полученным присоединением корня уравнения Галуа. Доказательство опирается на теорему 3.6 из п. 3.4. Уравнения Галуа удобны для построения группы Галуа (см. § 6, 7).

Пусть K — любое поле. Обозначим через $\widetilde{P}$ алгебру $K[x_1, \ldots, x_m]$ многочленов над полем K от переменных $x_1, \ldots, x_m$. На алгебре $\widetilde{P}$ действует группа автоморфизмов π, изоморфная группе $S(m)$ перестановок m элементов: действие группы заключается в одновременной перестановке переменных $x_1, \ldots, x_m$ во всех многочленах из кольца $K[x_1, \ldots, x_m]$. Алгебра инвариантов $\widetilde{K}$ относительно этого действия состоит из симметрических многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_m$.

Пусть $y \in \widetilde{P}$ — некоторый многочлен от m переменных, орбита которого под действием группы $S(m)$ содержит ровно $n = m!$ различных элементов $y = y_1, \ldots, y_n$. Обозначим через Q полином над алгеброй $\widetilde{K}$, корнями которого являются элементы $y_1, \ldots, y_n \in \widetilde{P}$ (см. теорему 3.2). Производная полинома Q не обращается в нуль в его корнях $y_1, \ldots, y_n$. Применяя утверждение 3.7 к действию группы $S(m)$ на алгебре $\widetilde{P}$ с алгеброй инвариантов $\widetilde{K}$, получаем такое следствие.

Следствие 5.1. *Для всякого элемента $F \in \widetilde{P} = K[x_1, \ldots, x_m]$ существует полином T, коэффициенты которого — симметрические многочлены от переменных $x_1, \ldots, x_m$, такой что выполняется тождество*

$$FQ'(y) = T(y).$$

Пусть $b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m = 0$ — алгебраическое уравнение над полем K, $b_i \in K$, корни $x_1^0, \ldots, x_m^0$ которого попарно различны между собой. Пусть P — поле, полученное присоединением к полю K всех корней этого уравнения. Рассмотрим отображение $\pi : K[x_1, \ldots, x_m] \to$ $\to P$, сопоставляющее каждому многочлену его значение в точке $(x_1^0, \ldots, x_m^0) \in P^m$.

Следствие 5.2. *Пусть* $y \in K[x_1, \ldots, x_m]$ *— такой многочлен, что все* $n = m!$ *многочленов, полученных из* y *всевозможными перестановками переменных, принимают различные значения в точке* $(x_1^0, \ldots, x_m^0) \in P^m$. *Тогда значение многочлена* y *в этой точке порождает поле* P *над полем* K.

Доказательство. Действительно, алгебраические элементы $x_1^0, \ldots, x_m^0$ порождают поле P над полем K. Поэтому каждый элемент поля P является значением некоторого многочлена из кольца $K[x_1, \ldots, x_m]$ в точке $x_1^0, \ldots, x_m^0$. Но согласно следствию 5.2 каждый многочлен F после умножения на $Q'(y)$ представляется в виде полинома T от y с коэффициентами из алгебры $\widetilde{K}$. Подставим в соответствующее тождество $F(x_1, \ldots, x_m) = Q'(y)T(y)$ точку $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$. По условию все $n = m!$ корней полинома Q в точке $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ различны между собой. Поэтому функция $Q'(y)$ в этой точке отлична от нуля, а значение симметрических полиномов в точке $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ принадлежат полю K (так как симметрические полиномы от корней уравнения выражаются через его коэффициенты). □

Лемма 5.3. *Для любых попарно различных элементов* $x_1^0, \ldots, x_m^0$ *поля* $P \supseteq K$ *существует линейный многочлен* $y = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m$ *с коэффициентами* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *из поля* K, *такой что все* $n = m!$ *многочленов, полученных из многочлена* y *перестановками переменных, принимают различные значения в точке* $(x_1^0, \ldots, x_m^0) \in P^m$.

Доказательство. Рассмотрим $n = m!$ точек, полученных из точки $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ всевозможными перестановками координат. Для каждой пары точек линейные многочлены, принимающие равные значения в этих точках, образуют собственное подпространство в пространстве линейных многочленов с коэффициентами в поле K. Подпространства, соответствующие всевозможным парам точек, не могут покрывать всего пространства (утверждение 2.1). Любой линейный полином y, не лежащий в объединении описанных собственных подпространств, удовлетворяет условиям леммы. □

Определение. Уравнение $a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = 0$ над полем K называется *уравнением Галуа*, если его корни $x_1^0, \ldots, x_m^0$ обладают следующим свойством: для любой пары корней x_i^0, x_j^0 найдется полином $P_{i,j}(t)$ над полем K, такой что $P_{i,j}(x_i^0) = x_j^0$.

Теорема 5.4. *Пусть поле* P *получается из поля* K *при помощи присоединения всех корней алгебраического уравнения над полем* K, *не имеющего кратных корней. Тогда то же самое поле* P *можно* *получить из поля K, присоединяя один корень некоторого (вообще говоря, другого) неприводимого уравнения Галуа над полем K.*

Доказательство. По условию все корни $x_1^0, \ldots, x_m^0$ уравнения попарно различны. Рассмотрим такой однородный линейный многочлен y с коэффициентами в поле K, что все $n = m!$ линейных многочленов, полученных из многочлена y перестановкой переменных, принимают в точке $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ различные значения. Рассмотрим уравнение степени n над полем K, корнями которого являются эти значения. Согласно доказанному выше следствию полученное уравнение является уравнением Галуа, а его корни порождают поле P. Полученное уравнение Галуа может оказаться приводимым. Приравнивая к нулю любой из неприводимых сомножителей, получим искомое неприводимое уравнение Галуа. □

§ 6. Автоморфизмы, связанные с уравнением Галуа

В этом параграфе строится группа автоморфизмов расширения, полученного из исходного поля присоединением всех корней некоторого уравнения Галуа. Показывается (теорема 6.2), что поле инвариантов этой группы совпадает с полем коэффициентов.

Пусть $Q = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$ — неприводимый многочлен над полем K. Тогда все поля, порожденные над полем K одним корнем уравнения Q, изоморфны между собой и допускают следующее абстрактное описание: каждое такое поле изоморфно фактору кольца $K[x]$ по простому идеалу I_Q, порожденному неприводимым многочленом Q. Обозначим это поле через $K[x]/I_Q$.

Пусть M — расширение поля K, содержащее все n корней $x_1^0, \ldots, x_n^0$ уравнения $Q(x) = 0$. С каждым корнем x_i^0 свяжем поле K_i, являющееся расширением поля K при помощи корня x_i^0. Все поля K_i, $i = 1, \ldots, n$, изоморфны между собой и изоморфны полю $K[x]/I_Q$. Обозначим через σ_i изоморфное отображение поля $K[x]/I_Q$ в поле K_i, оставляющее на месте элементы поля коэффициентов K и переводящее многочлен x в элемент x_i^0.

Лемма 6.1. *Пусть уравнение $Q = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n = 0$ неприводимо над полем K. Тогда образы $\sigma_i(a)$ элемента a поля $K[x]/I_Q$ в поле M при всех изоморфизмах σ_i, $i = 1, \ldots, n$, совпадают между собой, если и только если элемент a лежит в поле коэффициентов K.*

Доказательство. Если $b=\sigma_1(a)=\ldots=\sigma_n(a)$, то элемент b равен $(\sigma_1(a)+\ldots+\sigma_n(a))n^{-1}$ (в рассматриваемом случае $n\neq 0$ в поле K). Поэтому элемент b является значением симметрического многочлена от корней $x_1^0, \ldots, x_n^0$ уравнения $Q(x)=0$, т. е. принадлежит полю коэффициентов K. □

Теперь все готово для доказательства основного утверждения этого параграфа.

Теорема 6.2. *Пусть поле P получено из поля K присоединением всех корней неприводимого алгебраического уравнения над полем K. Тогда элемент $b\in P$ неподвижен при всех автоморфизмах поля P, оставляющих неподвижными все элементы поля K, если и только если $b\in K$.*

Доказательство. Согласно теореме 5.4 можно считать, что поле P получено из K присоединением всех корней (или, что то же самое, одного корня) неприводимого уравнения Галуа. По определению уравнения Галуа все поля K_i, о которых идет речь в лемме 6.1, совпадают между собой и совпадают с полем P. Изоморфизм $\sigma_j\sigma_i^{-1}$ поля K_i в поле K_j является автоморфизмом поля P, оставляющим неподвижными все элементы поля K. Согласно лемме элемент $b\in P$ неподвижен при всех таких автоморфизмах, если и только если $b\in K$. □

§ 7. Основная теорема теории Галуа

В § 2, 3, 5 и 6 фактически уже были доказаны центральные теоремы теории Галуа. В этом параграфе подводятся итоги. Определяются расширения Галуа (п. 7.1), группы Галуа (п. 7.2), доказывается основная теорема теории Галуа (п. 7.3), обсуждаются свойства соответствия Галуа (п. 7.4) и поведение группы Галуа при увеличении поля коэффициентов.

7.1. Расширения Галуа. Приведем два эквивалентных определения.

Определение 1. Поле P, полученное из поля K присоединением всех корней некоторого алгебраического уравнения над полем K, называется *расширением Галуа* поля K.

Определение 2. Поле P является *расширением Галуа* своего подполя K, если существует конечная группа автоморфизмов G поля P, полем инвариантов которой является поле K.

Утверждение 7.1. *Определения 1 и 2 эквивалентны. Группа G из определения 2 совпадает с группой всех автоморфизмов поля P над полем K. Следовательно, группа G определена однозначно.*

Доказательство. Если поле P является расширением Галуа поля K в смысле определения 1, то по теореме 6.2 поле P является расширением Галуа поля P в смысле определения 2. Пусть теперь поле P является расширением Галуа поля K в смысле определения 2. Согласно следствию 2.2 существует элемент $a \in P$, который сдвигается с места любым нетривиальным элементом группы G. Рассмотрим орбиту O элемента a относительно действия группы G. Согласно теореме 3.2 существует алгебраическое уравнение над полем K, множество корней которого совпадает с O. Согласно теореме 3.6 любой из элементов орбиты, т. е. любой из корней этого алгебраического уравнения, порождает поле P над полем K. Тем самым поле P является расширением Галуа поля K в смысле определения 1.

Любой автоморфизм σ поля P над полем K переводит элемент a в некоторый элемент множества O, так как множество O является множеством решений уравнения с коэффициентами в поле K. Поэтому для σ найдется такой элемент g группы G, что $\sigma(a) = g(a)$. Автоморфизм σ совпадает с этим элементом g, так как элемент a порождает поле P над полем K. Значит, группа G совпадает с группой всех автоморфизмов поля P над полем K. □

7.2. Группы Галуа. Перейдем к группам Галуа — центральному объекту теории Галуа.

Группой Галуа расширения Галуа P поля K (или, короче, группой Галуа поля P над полем K) называется группа всех автоморфизмов поля P над полем K. *Группой Галуа алгебраического уравнения* над полем K называется группа Галуа расширения Галуа P поля K, полученного присоединением к этому полю всех корней данного алгебраического уравнения.

Пусть поле P получается из поля K присоединением всех корней уравнения

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 \tag{7}$$

над полем K.

Каждый элемент σ из группы Галуа поля P над полем K переставляет корни уравнения (7). Действительно, применяя автоморфизм

σ к равенству (7), получаем

$$\sigma(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)=a_0+a_1\sigma(x)+\ldots+a_n(\sigma(x))^n=0.$$

Таким образом, группа Галуа поля P над полем K имеет представление в группе перестановок корней уравнения (7). Это представление точное: если автоморфизм оставляет неподвижными все корни уравнения (7), то он сохраняет на месте все элементы поля P и, следовательно, является тривиальным.

Определение. *Соотношением* между корнями уравнения (7), определенным над полем K, называется любой полином Q, принадлежащий кольцу $K[x_1,\ldots,x_n]$, который обращается в нуль в точке $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$, где $x_1^0,\ldots,x_n^0$ — набор корней уравнения (7).

Утверждение 7.2. *Всякий автоморфизм из группы Галуа сохраняет все соотношения над полем K между корнями уравнения* (7). *Обратно, всякая перестановка корней, сохраняющая все соотношения между корнями, определенные над полем K, продолжается до автоморфизма из группы Галуа.* (Таким образом, группу Галуа поля P над полем K можно отождествить с группой всех перестановок корней уравнения (7), сохраняющих все соотношения между корнями, определенные над полем K.)

Доказательство. Если перестановка $\sigma\in S(n)$ соответствует элементу группы Галуа, то полином σQ, полученный из соотношения Q перестановкой σ переменных $x_1,\ldots,x_n$, тоже обращается в нуль в точке $x_1^0,\ldots,x_n^0$. Обратно, пусть перестановка σ сохраняет все соотношения между корнями, определенные над полем K. Продолжим перестановку σ до автоморфизма поля P над полем K. Всякий элемент поля P является значением некоторого полинома Q_1, принадлежащего кольцу $K[x_1,\ldots,x_n]$, в точке $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$. Значение автоморфизма σ на этом элементе естественно определить как значение полинома σQ_1, полученного из полинома Q_1 перестановкой переменных σ, в точке $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$. Нужно проверить, что это определение корректно. Пусть Q_2 — другой полином из кольца $K[x_1,\ldots,x_n]$, значение которого в точке $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ совпадает со значением в этой точке полинома Q_1. Но тогда полином Q_1-Q_2 является соотношением над полем K между корнями. Поэтому полином $\sigma Q_1-\sigma Q_2$ тоже должен обратиться в нуль в точке $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$, но это и означает, что автоморфизм σ определен корректно. $\square$

7.3. Основная теорема. Пусть поле P является расширением Галуа поля K. Теория Галуа описывает все промежуточные поля, т. е. все поля, лежащие в поле P и содержащие поле K. Сопоставим каждой подгруппе L группы Галуа поля P над полем K подполе P_L всех элементов, остающихся неподвижными при действии подгруппы L. Это соответствие называется *соответствием Галуа*.

Теорема 7.3 (основная теорема теории Галуа). *Соответствие Галуа расширения Галуа является взаимно однозначным соответствием между множеством подгрупп группы Галуа и множеством промежуточных полей.*

Доказательство. Во-первых, согласно теореме 2.4 различные подгруппы группы Галуа имеют различные поля инвариантов. Во-вторых, если поле P является расширением Галуа поля K, то оно является расширением Галуа и всякого промежуточного поля. Это очевидно, если воспользоваться определением 1 расширения Галуа из п. 7.1. Из определения 2 расширения Галуа (там же) видно, что промежуточное поле является неподвижным полем для некоторой группы автоморфизмов поля P над полем K. Теорема доказана. □

7.4. Свойства соответствия Галуа. Обсудим простейшие свойства соответствия Галуа.

Утверждение 7.4. *Промежуточное поле является расширением Галуа поля коэффициентов, если и только если при соответствии Галуа этому полю сопоставляется нормальный делитель группы Галуа. Группа Галуа промежуточного расширения Галуа над полем коэффициентов изоморфна факторгруппе группы Галуа исходного расширения по нормальному делителю, соответствующему промежуточному расширению Галуа.*

Доказательство. Пусть H — нормальный делитель группы Галуа G и L_H — промежуточное поле, соответствующее подгруппе H. Поле L_H переходит в себя при действии автоморфизмов из группы G, так как множество неподвижных точек действия нормального делителя инвариантно относительно действия группы (утверждение 1.3). Группа автоморфизмов поля L_H, индуцированная действием группы G, изоморфна факторгруппе G/H. Поле инвариантов относительно действия на поле L_H индуцированной группы автоморфизмов совпадает с полем K. Итак, если H — нормальный делитель группы G, то L_H — расширение Галуа поля K с группой Галуа G/H.

Пусть K_1 — промежуточное расширение Галуа поля K. Поле K_1 получается из поля K присоединением всех корней некоторого алгебраического уравнения над полем K. Любой автоморфизм g из группы Галуа G лишь переставляет между собой корни этого уравнения и поэтому переводит поле K_1 в себя. Пусть поле K_1 соответствует подгруппе H, $K_1 = L_H$. Элемент g группы G переводит поле L_H в поле $L_{gHg^{-1}}$. Итак, если промежуточное расширение Галуа K_1 соответствует подгруппе H, то для всякого элемента $g \in G$ справедливо равенство $H = gHg^{-1}$. Другими словами, группа H является нормальным делителем группы Галуа G. □

Утверждение 7.5. *Наименьшее алгебраическое расширение поля K, содержащее два заданных расширения Галуа поля K, является расширением Галуа поля K.*

Доказательство. Наименьшее поле P, содержащее оба расширения Галуа, можно построить следующим образом. Пусть первое поле получается добавлением к полю K всех корней полинома Q_1, а второе поле — всех корней полинома Q_2. Поле P получается присоединением к полю K всех корней полинома $Q = Q_1 Q_2$ и, следовательно, является расширением Галуа поля K. □

Утверждение 7.6. *Пересечение двух расширений Галуа является расширением Галуа. Группа Галуа пересечения является факторгруппой группы Галуа каждого из исходных расширений Галуа.*

Доказательство. Пусть P — наименьшее поле, содержащее оба расширения Галуа. Как мы доказали, P — расширение Галуа поля K. Группа Галуа поля P над полем K переводит в себя как первое, так и второе расширение поля K. Следовательно, пересечение двух расширений Галуа также будет переводиться в себя действиями группы G. Поэтому согласно утверждению 7.4 пересечение двух расширений Галуа будет расширением Галуа. Из того же утверждения вытекает, что группа Галуа пересечения является факторгруппой группы Галуа каждого из исходных расширений Галуа. □

7.5. Изменение поля коэффициентов. Пусть

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 \tag{8}$$

— алгебраическое уравнение над полем K и P — расширение Галуа поля K, полученное присоединением к полю K всех корней уравнения (8). Рассмотрим большее поле $\widetilde{K} \supset K$ и его расширение Галуа $\widetilde{P}$, полученное присоединением к полю $\widetilde{K}$ всех корней уравнения (8). Как связана группа Галуа поля $\widetilde{P}$ над $\widetilde{K}$ с группой Галуа G поля P над K? Или, другими словами, что происходит с группой Галуа уравнения (8) при увеличении основного поля (т. е. при переходе от поля K к полю $\widetilde{K}$)?

При увеличении поля коэффициентов группа Галуа уравнения, вообще говоря, уменьшается, т. е. заменяется некоторой подгруппой Галуа уравнения над исходным полем. Действительно, над бо́льшим полем может быть больше соотношений между корнями уравнения (8). Приведем более точное утверждение.

Обозначим через K_1 пересечение полей P и $\widetilde{K}$. Поле K_1 содержит поле K и лежит в поле P, т. е. $K \subset K_1 \subset P$. Согласно основной теореме теории Галуа полю K_1 соответствует некоторая подгруппа G_1 группы Галуа G.

Теорема 7.7. *Группа Галуа $\widetilde{G}$ поля $\widetilde{P}$ над полем $\widetilde{K}$ изоморфна подгруппе G_1 в группе Галуа G поля P над полем K.*

Доказательство. Группа Галуа $\widetilde{G}$ оставляет элементы поля K неподвижными (так как $K \subset \widetilde{K}$) и переставляет корни уравнения (8). Поэтому поле P переводится автоморфизмами группы $\widetilde{G}$ в себя. Неподвижными элементами относительно индуцированной группы автоморфизмов поля P являются в точности те элементы поля P, которые содержатся в поле $\widetilde{K}$, т. е. элементы поля $K_1 = P \cap \widetilde{K}$. Поэтому индуцированная группа автоморфизмов поля P совпадает с подгруппой G_1 группы Галуа G поля P над полем K. Осталось показать, что описанный выше гомоморфизм группы $\widetilde{G}$ в группу G_1 не имеет ядра. Действительно, ядро этого гомоморфизма оставляет неподвижными все корни уравнения (8), т. е. содержит лишь тривиальный элемент группы $\widetilde{G}$. Теорема доказана. $\square$

Пусть теперь в условиях предыдущей теоремы поле $\widetilde{K}$ само является расширением Галуа поля K с группой Галуа Γ. Согласно утверждению 7.6 поле K_1 в этом случае также является расширением Галуа поля K. Обозначим через Γ_1 группу Галуа расширения K_1 поля K.

Теорема 7.8 (об изменении группы Галуа при расширении Галуа поля коэффициентов). *При расширении Галуа поля коэффициентов группа Галуа G исходного уравнения заменяется своим нормальным делителем G_1. Факторгруппа G/G_1 группы G по этому нормальному делителю изоморфна факторгруппе группы Галуа нового поля коэффициентов $\widetilde{K}$ над старым полем коэффициентов K.*

Доказательство. Действительно, группа G_1 соответствует полю $P \cap \widetilde{K}$, которое является расширением Галуа поля K. Поэтому группа G_1 является нормальным делителем группы G, а ее факторгруппа G/G_1 изоморфна группе Галуа поля K_1 над полем K. Но группа Галуа поля K_1 над полем K изоморфна факторгруппе Γ/Γ_1. Теорема доказана. □

§ 8. Критерий разрешимости уравнений в радикалах

Алгебраическое уравнение над полем K *разрешимо в радикалах*, если существует цепочка расширений $K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n$, в которой поле K_{j+1} получается из поля K_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, присоединением радикала, а поле K_n содержит все корни исходного алгебраического уравнения. Решается ли заданное алгебраическое уравнение в радикалах? Теория Галуа была создана для ответа на этот вопрос.

В п. 8.1 рассматривается группа корней n-й степени из единицы, лежащих в заданном поле K. В п. 8.2 рассматривается группа Галуа уравнения $x^n = a$. В п. 8.3 приводится критерий разрешимости алгебраического уравнения в радикалах (в терминах группы Галуа этого уравнения).

8.1. Корни из единицы. Пусть K — некоторое поле. Обозначим через K_E^* мультипликативную группу всех корней из единицы поля K (т. е. $a \in K_E^*$, если и только если $a \in K$ и для некоторого натурального n выполнено равенство $a^n = 1$).

Утверждение 8.1. *Если в группе K_E^* существует подгруппа, содержащая l элементов, то уравнение $x^l = 1$ имеет в поле K ровно l различных корней и рассматриваемая подгруппа образована всеми этими корнями.*

Доказательство. Каждый элемент x в группе порядка l удовлетворяет уравнению $x^l = 1$. В поле есть не более чем l корней такого уравнения, а группа по условию имеет ровно l элементов. □

Из утверждения 8.1 вытекает, в частности, что в группе K_E^* есть не более одной циклической подгруппы любого заданного порядка l.

Утверждение 8.2. *Конечная абелева группа G, имеющая не более одной циклической подгруппы любого заданного порядка, является циклической группой. В частности, любая конечная подгруппа в группе K_E^* является циклической группой.*

Доказательство. Из классификации конечных абелевых групп следует, что абелева группа, удовлетворяющая условию утверждения, с точностью до изоморфизма определяется числом m своих элементов: если $m = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$ — разложение числа m на простые множители, то $G = (\mathbb{Z}/p_1^{k_1}\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/p_n^{k_n}\mathbb{Z})$. Поэтому (см. утверждение 8.1) группы корней из единицы, содержащие заданное число элементов m, в различных полях изоморфны между собой. Но в поле комплексных чисел группа порядка m, состоящая из всех корней из единицы порядка m, очевидно, является циклической. □

Циклическую группу из m элементов можно отождествить с аддитивной группой кольца вычетов по модулю m.

Утверждение 8.3. *Группа автоморфизмов группы $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ изоморфна мультипликативной группе обратимых элементов кольца вычетов по модулю m. В частности, эта группа автоморфизмов коммутативна.*

Доказательство. Автоморфизм F группы $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ однозначно определяется элементом $F(1)$, который, очевидно, должен быть обратим в мультипликативной группе кольца вычетов. Этот автоморфизм совпадает с умножением на $F(1)$. □

Лемма 8.4. *Пусть расширение Галуа P поля K получается из поля K присоединением некоторых корней из единицы. Тогда группа Галуа поля P над полем K коммутативна.*

Доказательство. Все корни из единицы, лежащие в поле P, образуют циклическую группу по умножению. Преобразование из группы Галуа задает автоморфизм этой группы и целиком определяется этим автоморфизмом, т. е. группа Галуа вкладывается в группу автоморфизмов циклической группы. Теперь лемма 8.4 вытекает из утверждения 8.3. □

8.2. Уравнение $x^n = a$.

Утверждение 8.5. *Пусть поле K содержит все корни степени n из единицы. Тогда группа Галуа уравнения $x^n - a = 0$ над полем K, где $0 \neq a \in K$, является подгруппой циклической группы из n элементов.*

Доказательство. Группа корней n-й степени из единицы циклическая (см. утверждение 8.2). Пусть ξ — любая образующая этой группы. Фиксируем любой корень x_0 уравнения $x^n - a = 0$. Занумеруем корни уравнения $x^n - a = 0$ вычетами i по модулю n, положив x_i равным $\xi^i x_0$. Пусть преобразование g из группы Галуа переводит корень x_0 в корень x_i. Тогда $g(x_k)=g(\xi^k x_0)=\xi^{k+i}x_0=x_{k+i}$ (напомним, что по предположению $\xi \in K$, поэтому $g(\xi)=\xi$), т. е. всякое преобразование группы Галуа задает циклическую перестановку корней. Следовательно, группа Галуа вкладывается в циклическую группу из n элементов. □

Лемма 8.6. *Группа Галуа G уравнения $x^n-a=0$ над полем K, где $0\neq a\in K$, обладает коммутативным нормальным делителем G_1, факторгруппа G/G_1 относительно которого коммутативна. В частности, группа Галуа G разрешима.*

Доказательство. Пусть P — расширение поля K, полученное добавлением к этому полю всех корней уравнения $x^n=a$. Отношение любых двух корней уравнения $x^n=a$ является корнем n-й степени из единицы. Отсюда видно, что поле P содержит все корни степени n из единицы. Обозначим через K_1 расширение поля K, полученное добавлением к этому полю всех корней степени n из единицы. Мы имеем включения $K\subset K_1\subset P$. Обозначим через G_1 группу Галуа уравнения $x^n=a$ над полем K_1. Согласно утверждению 1.4 группа G_1 коммутативна. Группа G_1 является нормальным делителем группы G, так как поле K_1 является расширением Галуа поля K. Факторгруппа G/G_1 коммутативна, так как согласно лемме 8.4 группа Галуа поля K_1 над полем K коммутативна. □

8.3. Разрешимость в радикалах. Справедлив следующий критерий разрешимости алгебраических уравнений в радикалах.

Теорема 8.7 (критерий разрешимости уравнений в радикалах). *Алгебраическое уравнение над некоторым полем решается в радикалах, если и только если его группа Галуа разрешима.*

Доказательство. Пусть уравнение решается в радикалах. Разрешимость уравнения в радикалах над полем K означает существование цепочки расширений $K=K_0\subset K_1\subset \ldots \subset K_n$, в которой поле K_{j+1} получается из поля K_j, $j=0,1,\ldots,n-1$, присоединением радикала, а поле K_n содержит все корни исходного алгебраического уравнения. Обозначим через G_j группу Галуа нашего уравнения над полем K_j. Проследим, что происходит с группой Галуа уравнения при переходе от поля K_i к полю K_{i+1}. Согласно теореме 7.8 группа G_{i+1} является нормальной подгруппой в группе G_i, причем факторгруппа G_i/G_{i+1} является одновременно факторгруппой группы Галуа поля K_{i+1} над полем K_i. Так как поле K_{i+1} получается из поля K_i

присоединением радикала, то согласно лемме 8.6 группа Галуа поля K_{i+1} над полем K_i разрешима. (В случае, когда поле K содержит все корни из единицы, группа Галуа поля K_{i+1} над полем K_i коммутативна.) Так как все корни алгебраического уравнения по условию лежат в поле K_n, то группа Галуа G_n алгебраического уравнения над полем K_n тривиальна.

Итак, если уравнение решается в радикалах, то у его группы Галуа G существует цепочка подгрупп $G=G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n$, в которой группа G_{i+1} является нормальным делителем группы G_i с разрешимой факторгруппой G_i/G_{i+1}, а группа G_n тривиальна. (Если поле K содержит все корни из единицы, то факторгруппы G_i/G_{i+1} коммутативны.) Таким образом, если уравнение решается в радикалах, то его группа Галуа разрешима.

Пусть группа Галуа G алгебраического уравнения над полем K разрешима. Обозначим через $\widetilde{K}$ поле, полученное из поля K присоединением всех корней из единицы. Группа Галуа $\widetilde{G}$ алгебраического уравнения над бо́льшим полем $\widetilde{K}$ является подгруппой группы G. Поэтому группа Галуа $\widetilde{G}$ разрешима. Обозначим через $\widetilde{P}$ поле, полученное из поля $\widetilde{K}$ присоединением всех корней алгебраического уравнения. Разрешимая группа $\widetilde{G}$ действует на поле $\widetilde{P}$ с полем инвариантов $\widetilde{K}$. Согласно теореме 1.2 каждый элемент поля $\widetilde{P}$ выражается в радикалах через элементы поля $\widetilde{K}$. По определению поля $\widetilde{K}$ каждый элемент этого поля выражается через корни из единицы и элементы поля K. Теорема доказана. $\square$

§ 9. Критерий разрешимости уравнений в k-радикалах

Скажем, что алгебраическое уравнение над полем K *разрешимо в k-радикалах*, если существует цепочка расширений $K=K_0 \subset K_1 \subset \ldots$ $\ldots \subset K_n$, в которой для каждого j, $0<j\leqslant n$, либо поле K_{j+1} получается из поля K_j присоединением радикала, либо поле K_{j+1} получается из поля K_j присоединением корня уравнения степени не выше k, а поле K_n содержит все корни исходного алгебраического уравнения. Решается ли заданное алгебраическое уравнение в k-радикалах? В этом параграфе дается ответ на этот вопрос. В п. 9.1 обсуждаются свойства k-разрешимых групп. В п. 9.2 доказывается критерий разрешимости уравнений в k-радикалах.

Начнем со следующего простого утверждения.

Утверждение 9.1. *Группа Галуа уравнения степени $m \leqslant k$ изоморфна подгруппе группы $S(k)$.*

Доказательство. Любой элемент группы Галуа переставляет корни уравнения и вполне определяется возникшей перестановкой корней. Поэтому группа Галуа уравнения степени m изоморфна подгруппе группы $S(m)$. При $m \leqslant k$ группа $S(m)$ является подгруппой группы $S(k)$. □

9.1. Свойства k-разрешимых групп. В этом пункте мы покажем, что k-разрешимые группы (см. § 4) имеют свойства, аналогичные свойствам разрешимых групп. Начнем с леммы 9.2, характеризующей подгруппы группы $S(k)$.

Лемма 9.2. *Группа изоморфна подгруппе группы $S(k)$, если и только если у нее есть набор из m подгрупп, $m \leqslant k$, такой что* 1) *пересечение подгрупп не содержит нормальных делителей группы, отличных от тривиального*; 2) *сумма индексов всех подгрупп не превосходит k.*

Доказательство. Пусть G является подгруппой группы $S(k)$. Рассмотрим представление группы G как некоторой подгруппы перестановок множества M, содержащего k элементов. Пусть под действием группы G множество M распадается на m орбит. Выберем в каждой орбите по точке x_i. Набор стационарных подгрупп G_i точек x_i удовлетворяет условиям леммы.

Обратно, пусть группа G обладает набором подгрупп, удовлетворяющим условиям леммы. Обозначим через P объединение множеств P_i правых классов смежности группы G по подгруппе G_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Группа G обладает естественным действием на множестве P. Возникающее представление группы G в группе $S(P)$ точное, так как ядро этого представления лежит в пересечении подгрупп G_i. Группа $S(P)$ вкладывается в группу $S(k)$, так как число точек в множестве P равно сумме индексов подгрупп G_i. □

Следствие 9.3. *Факторгруппа подгруппы симметрической группы $S(k)$ изоморфна подгруппе симметрической группы $S(k)$.*

Доказательство. Пусть группа G изоморфна подгруппе группы $S(k)$, и G_i — набор ее подгрупп, удовлетворяющих условию леммы. Пусть π — произвольный гомоморфизм группы G. Тогда совокупность подгрупп $\pi(G_i)$ в группе $\pi(G)$ тоже удовлетворяет условиям леммы. □

Скажем, что *нормальный делитель H в группе G имеет глубину, не превосходящую k*, если в группе G существует такая подгруппа G_0 индекса, не превосходящего k, что H является пересечением всех подгрупп, сопряженных с G_0.

Будем говорить, что *группа имеет глубину, не превосходящую k*, если ее единичный нормальный делитель имеет глубину не больше k.

Нормальной башней группы G называется вложенная цепочка подгрупп $G = G_0 \supset \ldots \supset G_n = e$, в которой каждая следующая группа является нормальным делителем в предыдущей группе.

Следствие 9.4. *Если группа G является подгруппой группы $S(k)$, то у группы G существует вложенная цепочка подгрупп $G = G_0 \supset \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n = e$, в которой группа G_n тривиальна, а для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ группа G_{i+1} является нормальным делителем группы G_i глубины, не превосходящей k.*

Доказательство. Пусть G_i — совокупность подгрупп в группе G, удовлетворяющих условиям леммы. Обозначим через F_i нормальный делитель группы G, равный пересечению всех подгрупп, сопряженных группе G_i. Цепочка подгрупп $\Gamma_0 = F_0$, $\Gamma_1 = F_0 \cap F_1$, $\ldots$, $\Gamma_m = F_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_m$ удовлетворяет требованиям следствия. $\square$

Лемма 9.5. *Группа G является k-разрешимой группой, если и только если у нее существует нормальная башня подгрупп $G = G_0 \supset \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n = e$, в которой для каждого i, $0 < i \leqslant n$, либо нормальный делитель G_i имеет в группе G_{i-1} глубину, не превосходящую k, либо факторгруппа G_{i-1}/G_i коммутативна.*

Доказательство. 1. Пусть у группы G есть нормальная башня $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n = e$, удовлетворяющая условиям леммы. Если для некоторого i нормальный делитель G_i в группе G_{i-1} имеет глубину не больше k, то у группы G_{i-1}/G_i есть цепочка подгрупп $G_{i-1}/G_i = \Gamma_0 \supset \ldots \supset \Gamma_m = e$, в которой индекс каждой следующей подгруппы в предыдущей не превосходит k. Для каждого такого номера i между группами G_{i-1} и G_i вставим цепочку подгрупп $G_{i-1} = \pi^{-1}(\Gamma_0) \supset \ldots \supset \pi^{-1}(\Gamma_m) = G_i$ где π — гомоморфизм факторизации. Мы получим цепочку подгрупп группы G, удовлетворяющую определению k-разрешимой группы.

2. Пусть группа G k-разрешима и $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n = e$ — цепочка подгрупп, удовлетворяющая условиям, перечисленным в определении k-разрешимой группы. Мы будем последовательно умень-

шать подгруппы в цепочке. Пусть i — первый номер, для которого группа G_i не является нормальным делителем в группе G_{i-1}, а является подгруппой индекса i в этой группе. В этом случае у группы G_{i-1} есть нормальный делитель H, лежащий в подгруппе G_i и такой, что группа G_{i-1}/H изоморфна подгруппе группы $S(k)$. Действительно, в качестве H достаточно взять пересечение всех подгрупп в группе G_{i-1}, сопряженных с группой G_i. Изменим цепочку подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n = e$ следующим образом: подгруппы с номерами, меньшими чем i, оставим без изменения. Каждую подгруппу G_j, $i \leqslant j$, заменим на группу $G_j \cap H$. Применим ту же процедуру к полученной цепочке подгрупп, и т. д. В результате мы получим нормальную башню подгрупп, удовлетворяющую условиям леммы. $\square$

Теорема 9.6. 1. *Подгруппа и факторгруппа k-разрешимой группы являются k-разрешимыми группами.*

2. *Если группа имеет k-разрешимый нормальный делитель, факторгруппа по которому k-разрешима, то группа тоже k-разрешима.*

Доказательство. Единственное неочевидное утверждение теоремы — это утверждение о факторгруппе. Оно легко вытекает из леммы 9.5. $\square$

9.2. Разрешимость в k-радикалах. Справедлив следующий критерий разрешимости уравнений в k-радикалах.

Теорема 9.7 (критерий разрешимости уравнений в k-радикалах). *Алгебраическое уравнение над некоторым полем решается в k-радикалах, если и только если его группа Галуа k-разрешима.*

Доказательство. 1. Пусть уравнение решается в k-радикалах. Нам надо показать, что группа Галуа уравнения k-разрешима. Это доказывается в точности так же, как разрешимость группы Галуа уравнения, решаемого в радикалах.

Пусть $K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n$ — цепочка полей, связанная с решением уравнения в k-радикалах, и $G_0 \supset \ldots \supset G_n$ — цепочка групп Галуа уравнения над этими полями. Поле K_n по условию содержит все корни уравнения, поэтому группа G_n тривиальна и, следовательно, является k-разрешимой. Предположим, что группа G_{i+1} k-разрешима. Надо доказать, что группа G_i тоже k-разрешима.

Если поле K_{i+1} получается из поля K_i присоединением радикала, то группа Галуа поля K_{i+1} над полем K_i разрешима и, следовательно, k-разрешима.

Если поле K_{i+1} получается из поля K_i присоединением всех корней уравнения степени не выше k, то группа Галуа поля K_{i+1} над полем K_i — подгруппа группы $S(k)$ (см. утверждение 9.1), и, следовательно, она k-разрешима.

Согласно теореме 1.2 группа G_{i+1} является нормальной подгруппой в группе G_i, причем факторгруппа G_i/G_{i+1} является одновременно факторгруппой группы Галуа поля K_{i+1} над полем K_i. Группа G_{i+1} k-разрешима по предположению. Группа Галуа поля K_{i+1} над полем K_i, как мы только что показали, k-разрешима. Воспользовавшись теоремой 9.6, получаем, что группа G_i k-разрешима.

2. Пусть группа Галуа G алгебраического уравнения над полем K k-разрешима. Обозначим через $\widetilde{K}$ поле, полученное из поля K присоединением всех корней из единицы. Группа Галуа $\widetilde{G}$ алгебраического уравнения над бóльшим полем $\widetilde{K}$ является подгруппой группы G. Поэтому группа Галуа $\widetilde{G}$ k-разрешима. Обозначим через $\widetilde{P}$ поле, полученное из поля $\widetilde{K}$ присоединением всех корней алгебраического уравнения. Группа $\widetilde{G}$ действует на поле $\widetilde{P}$ с полем инвариантов $\widetilde{K}$. Согласно теореме 4.1 каждый элемент поля $\widetilde{P}$ выражается через элементы поля $\widetilde{K}$ при помощи радикалов, арифметических операций и решения алгебраических уравнений степени не выше k. По определению поля $\widetilde{K}$ каждый элемент этого поля выражается через корни из единицы и элементы поля K. Теорема доказана. □

9.3. Неразрешимость общего уравнения степени $k+1>4$ в k-радикалах. Пусть K — некоторое поле. Общее алгебраическое уравнение степени k с коэффициентами из поля K — это уравнение

$$x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k = 0, \tag{9}$$

коэффициенты которого — достаточно общие элементы из поля K. Существуют ли формулы, включающие радикалы (k-радикалы) и переменные $a_1, \ldots, a_k$, которые при подстановке вместо переменных конкретных элементов $a_1^0, \ldots, a_k^0$ поля K дают решения уравнения $x^k + a_1^0x^{k-1} + \ldots + a_k^0 = 0$?

Общее алгебраическое уравнение можно рассматривать как уравнение над полем $K\{a_1, \ldots, a_k\}$ рациональных функций от k независимых переменных $a_1, \ldots, a_k$ с коэффициентами в поле K (при таком рассмотрении коэффициенты уравнения (7) — элементы $a_1, \ldots, a_k$ поля $K\{a_1, \ldots, a_k\}$). Теперь можно задаться вопросом о разрешимости уравнения (7) над полем $K\{a_1, \ldots, a_k\}$ в радикалах (или в k-радикалах).

Вычислим группу Галуа уравнения (7) над полем $K\{a_1, \ldots, a_k\}$. Рассмотрим еще один экземпляр $K\{x_1, \ldots, x_k\}$ поля рациональных функций от k переменных, наделенного группой автоморфизмов $S(k)$, действующей перестановками переменных $x_1, \ldots, x_k$. Поле инвариантов $K_S\{x_1, \ldots, x_k\}$ состоит из симметрических рациональных функций. По теореме о симметрических функциях это поле изоморфно полю рациональных функций от переменных $\sigma_1 = x_1 + \ldots$ $\ldots + x_k$, $\ldots$, $\sigma_n = x_1 \ldots x_k$. Поэтому отображение $F(a_1) = -\sigma_1$, $\ldots$, $F(a_n) = (-1)^n \sigma_n$ продолжается до изоморфизма $F\colon K\{a_1, \ldots, a_k\} \to$ $\to K_S\{x_1, \ldots, x_k\}$. Отождествим поля $K\{a_1, \ldots, a_k\}$ и $K_S\{x_1, \ldots, x_k\}$ с помощью изоморфизма F. Из сопоставления формул Виета и формул для отображения F видно, что при этом переменные $x_1, \ldots, x_k$ становятся корнями уравнения (7), поле $K\{x_1, \ldots, x_k\}$ становится полем, полученным присоединением к $K\{a_1, \ldots, a_k\}$ всех корней уравнения (7), группа автоморфизмов $S(k)$ становится группой Галуа уравнения (7). Итак, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 9.8. *Группа Галуа уравнения* (7) *над* $K\{a_1, \ldots, a_k\}$ *изоморфна группе перестановок* $S(k)$.

Теорема 9.9. *Общее алгебраическое уравнение степени* $k+1>4$ *не решается при помощи радикалов и решения вспомогательных алгебраических уравнений степени не выше* k.

Доказательство. Группа $S(k+1)$ имеет следующую нормальную башню подгрупп: $e \subset A(k+1) \subset S(k+1)$, где $A(k+1)$ — знакопеременная группа. При $k+1>4$ группа $A(k+1)$ — простая группа. Группа $A(k+1)$ не является подгруппой группы $S(k)$, так как в $A(k+1)$ больше элементов, чем в $S(k)$. Поэтому при $k+1>4$ группа $S(k+1)$ не является k-разрешимой. Для завершения доказательства осталось сослаться на теорему 9.7. □

В качестве следствия получаем такую теорему.

Теорема 9.10 (Абеля). *Общее алгебраическое уравнение степени выше* 4 *не решается в радикалах.*

Замечание. Абель доказал свою теорему другим способом еще до возникновения теории Галуа. Его подход был развит Лиувиллем. Метод Лиувилля позволяет, например, доказывать, что многие элементарные интегралы не берутся в элементарных функциях (см. главу 1).

§ 10. Неразрешимость сложных уравнений при помощи более простых уравнений

Можно ли решить заданное сложное алгебраическое уравнение, используя в качестве допустимых операций решения других, более простых, алгебраических уравнений? Мы рассмотрели два точно поставленных вопроса такого рода: вопрос о разрешимости уравнений в радикалах (в котором более простые уравнения — это уравнения $x^n - a = 0$) и вопрос о разрешимости уравнений в k-радикалах (в котором более простые уравнения — это уравнения $x^n - a = 0$ и любые алгебраические уравнения степени не выше k). В этом параграфе рассматривается общий вопрос о разрешимости сложных алгебраических уравнений при помощи более простых уравнений. В п. 10.1 приводится постановка задачи о B-разрешимости уравнений и доказывается необходимое условие ее разрешимости. В п. 10.2 обсуждаются классы групп, связанные с задачей B-разрешимости уравнений.

10.1. Необходимое условие разрешимости. Пусть B — некоторая совокупность алгебраических уравнений. Алгебраическое уравнение, определенное над полем K, автоматически определено и над любым бо́льшим полем K_1, $K \subset K_1$. Мы считаем, что совокупность алгебраических уравнений B вместе с каждым уравнением, определенным над полем K, содержит то же самое уравнение, рассматриваемое как уравнение, определенное над любым бо́льшим полем $K \subset K_1$.

Определение. Алгебраическое уравнение над полем K называется *разрешимым при помощи уравнений из совокупности B* или, короче, *B-разрешимым*, если существует последовательность полей $K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n$, такая что все корни уравнения лежат в поле K_n и для каждого $i = 0, \ldots, n-1$ поле K_{i+1} получается из поля K_i присоединением всех корней некоторого алгебраического уравнения из совокупности B, определенного над полем K_i.

Является ли заданное алгебраическое уравнение B-разрешимым? Теория Галуа доставляет необходимое условие для B-разрешимости уравнений. В настоящем пункте мы обсудим это условие.

Сопоставим совокупности уравнений B множество $G(B)$ групп Галуа этих уравнений.

Утверждение 10.1. *Множество конечных групп $G(B)$ с каждой группой содержит все ее подгруппы.*

Доказательство. Пусть некоторое уравнение, определенное над полем K, принадлежит совокупности уравнений B. Пусть P — поле, полученное присоединением к полю K всех корней этого уравнения, G — группа Галуа поля P над полем K и $G_1 \subset G$ — подгруппа группы G. Обозначим через K_1 промежуточное поле, соответствующее подгруппе G_1. Группа Галуа рассматриваемого уравнения над полем K_1 совпадает с подгруппой G_1. По условию совокупность уравнений B вместе со всяким уравнением, определенным над полем K, содержит то же самое уравнение над бо́льшим полем K_1. $\square$

Теорема 10.2 (необходимое условие B-разрешимости). *Если алгебраическое уравнение над полем K является B-разрешимым, то у его группы Галуа G существует нормальная башня подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n = e$, в которой каждая факторгруппа G_i/G_{i+1} является факторгруппой одной из групп $G(B)$.*

Доказательство. Действительно, B-разрешимость уравнения над полем K означает существование цепочки расширений $K = K_0 \subset \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n$, в которой поле K_{i+1} получается из поля K_i присоединением всех решений некоторого уравнения из совокупности B, а последнее поле K_n содержит все корни исходного алгебраического уравнения. Пусть $G = G_0 \supset \ldots \supset G_n = e$ — цепочка групп Галуа исходного уравнения над этой цепочкой полей. Покажем, что полученная цепочка подгрупп G_i удовлетворяет требованиям теоремы. Действительно, согласно теореме 7.8 группа G_{i+1} является нормальной подгруппой в группе G_i, причем факторгруппа G_i/G_{i+1} является одновременно факторгруппой группы Галуа поля K_{i+1} над полем K_i. Так как поле K_{i+1} получается из поля K_i присоединением всех корней алгебраического уравнения из совокупности B, то группа Галуа поля K_{i+1} над полем K_i принадлежит множеству $G(B)$. $\square$

10.2. Классы конечных групп. Пусть M — некоторое множество конечных групп.

Определение. *Пополнением* $\mathscr{K}(M)$ множества групп M назовем минимальный класс конечных групп, содержащий все группы из M и обладающий следующими свойствами:

1) класс $\mathscr{K}(M)$ вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы;

2) класс $\mathcal{K}(M)$ вместе с каждой группой содержит все ее факторгруппы;

3) если у группы G есть такой нормальный делитель H, что группы H и G/H принадлежат классу $\mathcal{K}(M)$, то группа G принадлежит классу $\mathcal{K}(M)$.

Доказанная выше теорема делает актуальной следующую задачу: для заданного множества M конечных групп описать его пополнение $\mathcal{K}(M)$. Напомним теорему Жордана—Гёльдера. Нормальная башня $G = G_0 \supset \ldots \supset G_n = e$ группы G называется *неуплотняемой*, если все факторгруппы G_i/G_{i+1} относительно этой башни являются простыми группами. Теорема Жордана—Гёльдера утверждает, что *для всякой конечной группы G множество факторгрупп G_i/G_{i+1} относительно любой неуплотняемой нормальной башни группы G не зависит от выбора неуплотняемой башни* (и, следовательно, определено инвариантно).

Утверждение 10.3. *Группа G принадлежит классу $\mathcal{K}(M)$, если и только если каждая факторгруппа G_i/G_{i+1} относительно неуплотняемой нормальной башни группы G является факторгруппой подгруппы некоторой группы из множества M.*

Доказательство. Во-первых, по определению класса $\mathcal{K}(M)$ каждая группа G, удовлетворяющая условиям утверждения, лежит в классе $\mathcal{K}(M)$. Во-вторых, несложно проверить, что группы G, удовлетворяющие условиям утверждения, обладают свойствами 1–3 из определения пополнения множества групп M. $\square$

Следствие 10.4. 1. *Пополнением множества всех конечных абелевых групп является класс всех конечных разрешимых групп.*

2. *Пополнением множества групп, содержащего группу $S(k)$ и все конечные абелевы группы, является класс всех конечных k-разрешимых групп.*

Замечание. Необходимые условия разрешимости алгебраических уравнений в радикалах и в k-радикалах являются частными случаями теоремы 10.2.

Глава 3

РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КВАДРАТУРАХ И ТЕОРИЯ ПИКАРА—ВЕССИО

Пикар обратил внимание на аналогию между линейными дифференциальными уравнениями и алгебраическими уравнениями и начал строить дифференциальный аналог теории Галуа. Венцом этой теории является теорема Пикара—Вессио, в которой вопрос о разрешимости или неразрешимости линейного дифференциального уравнения связывается с вопросом о разрешимости или неразрешимости группы Галуа уравнения, являющейся алгебраической группой Ли.

В этой главе подробно рассказывается о простейших расширениях Пикара—Вессио и об аналогии между линейными дифференциальными уравнениями и алгебраическими уравнениями. Формулируются основные теоремы теории Пикара—Вессио. Обсуждается линейно-алгебраическая часть теории, нужная для построения явных решений дифференциальных уравнений типа Фукса (см. § 1 главы 6). Формулируется критерий Колчина, позволяющий дать явные критерии различных видов разрешимости для систем дифференциальных уравнений типа Фукса с достаточно малыми коэффициентами (см. § 2 главы 6).

§ 1. АНАЛОГИЯ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ И АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Напомним простейшие свойства линейных дифференциальных уравнений и их аналоги для алгебраических уравнений.

1.1. Деление с остатком и наибольший общий делитель дифференциальных операторов. *Линейным дифференциальным оператором порядка* n над дифференциальным полем K называется оператор $L = a_n D^n + \ldots + a_0$, где $a_i \in K$ и $a_n \neq 0$, действующий на элементы y поля K по формуле

$$L(y) = a_n y^{(n)} + \ldots + a_0 y.$$

Для операторов L_1 и L_2 над K их произведение $L=L_1\circ L_2=L_1(L_2)$ тоже является оператором над K. Произведение операторов, вообще говоря, некоммутативно, но в старшем члене эта некоммутативность не проявляется. Старший член произведения $L=L_1\circ L_2$ операторов L_1 и L_2 равен произведению старших членов операторов L_1 и L_2.

Для операторов L и L_2 порядков n и k над K существуют и единственны операторы L_1 и R над K, такие что $L=L_1\circ L_2+R$ и порядок оператора R строго меньше чем k. Оператор R называется *остатком от деления справа* оператора L на оператор L_2. Операторы L_1 и R строятся по операторам L и L_2 явно: алгоритм деления операторов с остатком основан на приведенной выше формуле для старшего члена произведения операторов и абсолютно аналогичен алгоритму деления с остатком полиномов от одной переменной.

Для любых двух операторов L_1 и L_2 над K можно явно найти их правый наибольший общий делитель N. Это такой оператор N над K наибольшего возможного порядка, который делит справа операторы L_1 и L_2, т. е. $L_1=M_1\circ N$ и $L_2=M_2\circ N$, где M_1 и M_2 — некоторые операторы над K. Нахождение операторов M_1, M_2 и N по операторам L_1 и L_2 абсолютно аналогично алгоритму Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух полиномов от одной переменной и основано на алгоритме деления операторов с остатком. Как и в коммутативном случае, наибольший общий делитель N предста́вим в виде $N=AL_1+BL_2$, где A, B — некоторые операторы над K.

Ясно, что y является решением уравнения $N(y)=0$, если и только если $L_1(y)=0$ и $L_2(y)=0$.

1.2. Понижение порядка линейного дифференциального уравнения как аналог теоремы Безу. Пусть L — линейный дифференциальный оператор над K, y_1 — ненулевой элемент поля K, $p=\frac{y_1'}{y_1}$ — его логарифмическая производная и $L_2=D-p$ — оператор первого порядка, аннулирующий y_1. Остаток R от деления справа L на L_2 является оператором умножения на c_0, где $c_0=\frac{1}{y_1}L(y_1)$. Действительно, нужное равенство получается при подстановке $y=y_1$ в тождество $L(y)\equiv L_1\circ L_2(y)+c_0y$. Оператор L делится справа на оператор L_2, если и только если элемент y_1 удовлетворяет тождеству $L(y_1)\equiv 0$.

Используя ненулевое решение y_1 уравнения n-го порядка $L(y)=0$, можно понизить порядок этого уравнения. Для этого надо представить оператор L в виде $L=L_1\circ L_2$, где L_1 — оператор $(n-1)$-го порядка. *Коэффициенты оператора L_1 лежат в расширении дифференциального поля K логарифмической производной p элемента y_1.* Если известно любое решение u уравнения $L_1(u)=0$, то по нему можно построить некоторое решение y исходного уравнения $L(y)=0$. Для этого достаточно решить уравнение $L_2(y)=y'-py=u$. Описанная процедура называется *понижением порядка дифференциального уравнения*.

Замечание 1. Оператор, аннулирующий y_1, определен с точностью до умножения на произвольную функцию, и от выбора этой функции зависит процедура понижения порядка. Легче делить на оператор $\tilde{L}_2=D\circ y_1^{-1}$, являющийся композицией умножения на элемент y_1^{-1} и дифференцирования. Для этого достаточно вычислить оператор $L_3=L\circ y_1$, являющийся композицией умножения на элемент y_1 и оператора L. Оператор L_3 делится справа на D, т. е. $L_3= =\tilde{L}_1\circ D$, так как $L_3(1)\equiv L\circ y_1(1)\equiv 0$. Видно, что $L=\tilde{L}_1\circ\tilde{L}_2$. Исходное уравнение $L(y)=0$ сводится к уравнению $\tilde{L}_1(u)=0$ меньшего порядка. Обычно именно такую процедуру понижения порядка приводят в учебниках по дифференциальным уравнениям. Отметим, что коэффициенты оператора $\tilde{L}_1$ лежат в расширении дифференциального поля K самим элементом y_1, а не его логарифмической производной p, что иногда делает оператор $\tilde{L}_1$ менее удобным, чем оператор L_1.

В алгебре есть следующие аналоги приведенных фактов: 1) остаток от деления полинома P от переменной x на $x-a$ равен значению полинома P в точке a (теорема Безу); 2) если известно одно решение x_1 уравнения $P(x)=0$, то его степень можно понизить, остальные корни полинома P удовлетворяют уравнению меньшей степени $Q(x)=0$, где $Q=P:(x-x_1)$. Кроме аналогии здесь имеется и отличие: решения дифференциального уравнения, полученного процедурой понижения порядка, вообще говоря, не являются решениями исходного уравнения.

Замечание 2. Экспоненты являются собственными функциями дифференциальных операторов $P(D)$ с постоянными коэффициентами. Этот факт эквивалентен теореме Безу. Действительно, если $P=Q(x-a)+P(a)$, то $P(D)=Q(D)\circ(D-a)+P(a)$. Поэтому решение

y_1 дифференциального уравнения $(D-a)y=0$ является собственным вектором оператора $P(D)$ с собственным числом $P(a)$.

1.3. Общее линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и резольвенты Лагранжа. Покажем, что решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами аналогично решению алгебраического уравнения в радикалах (см. § 1 главы 2).

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $L(D)=D^n - a_{n-1}D^{n-1} - \ldots - a_0E$ с постоянными комплексными коэффициентами $a_{n-1}, \ldots, a_0$. Пусть характеристический полином $T(t) = t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \ldots - a_0$ этого оператора имеет ровно n различных комплексных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда линейное дифференциальное уравнение $L(y)=0$ решается явно при помощи обобщенных резольвент Лагранжа. Резольвенты Лагранжа используются здесь точно так же, как при решении алгебраических уравнений в радикалах. Обсудим это подробнее.

Рассмотрим векторное пространство V решений уравнения

$$L(D)y = y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \ldots - a_0y = 0. \tag{10}$$

Ясно, что оператор дифференцирования D переводит пространство V в себя. Оператор $D: V \to V$ удовлетворяет уравнению $T(D) = 0$. Обозначим через $T_i(D)$ обобщенную резольвенту Лагранжа оператора $D: V \to V$, соответствующую корню λ_i (см. п. 1.3 главы 2).

Теорема 1.1. *Всякое решение y уравнения* (10) *является суммой своих обобщенных резольвент Лагранжа: $y = y_{(\lambda_1)} + \ldots + y_{(\lambda_n)}$. Обобщенная резольвента Лагранжа $y_{\lambda_i} = P_{(\lambda_i)}(D)y$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'_{\lambda_i} = \lambda_i y_{\lambda_i}$.*

Доказательство. Теорема 1.1 немедленно следует из утверждения 1.4 главы 2. □

Итак, обобщенные резольвенты Лагранжа позволяют сводить общее уравнение (10), для которого характеристическое уравнение имеет простые корни, к уравнениям $y'_{\lambda_i} = \lambda_i y_{\lambda_i}$.

Удобное обозначение. Пусть $Q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_kx^k$ — полином над полем $\mathbb{C}$ и $u_0, \ldots, u_k$ — последовательность комплексных чисел. *Комплексное число $(b_0u_0 + b_1u_1 + \ldots + b_ku_k) \in M$ удобно обозначать символом $Q\langle u_0, \ldots, u_k\rangle$.*

Используя это обозначение, можно написать формулу для решения y уравнения (10), имеющего следующие начальные данные: $y(t_0)=y_0, \ldots, y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{n-1}$.

Следствие 1.2. *Решение сформулированной выше задачи Коши задается следующей формулой*:

$$y(t) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} P_{(\lambda_i)}\langle y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\rangle \exp \lambda_i(t-t_0).$$

Используя интерполяционные полиномы с кратными узлами интерполирования, можно написать явные формулы для решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которого имеет кратные корни (см. [48]).

1.4. Аналог формул Виета для дифференциальных операторов. Если известны все корни $x_1, \ldots, x_n$ полинома P степени n со старшим коэффициентом 1, то полином P можно восстановить: по формулам Виета $P(x)=x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n$, где $p_1=-\sigma_1, \ldots, p_n=(-1)^n\sigma_n$ и $\sigma_1=x_1+\ldots+x_n, \ldots, \sigma_n=x_1\ldots x_n$. Функции $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ не меняются при перестановке корней и называются основными симметрическими функциями.

Аналогично этому если известны n линейно независимых решений $y_1, \ldots, y_n$ линейного дифференциального уравнения n-го порядка $L=0$, где L — оператор, у которого коэффициент при старшей производной равен единице, то оператор L можно восстановить. Действительно, прежде всего такой оператор не более чем один: разность L_1-L_2 двух операторов, обладающих этими свойствами, является оператором порядка меньше чем n, имеющим n линейно независимых решений, что возможно, лишь если L_1 совпадает с L_2.

Вронскиан W от n независимых решений $y_1, \ldots, y_n$ линейного дифференциального уравнения не равен нулю. Рассмотрим уравнение $W(y, y_1, \ldots, y_n)=0$, где $W(y, y_1, \ldots, y_n)$ — вронскиан от неизвестной функции y и функций $y_1, \ldots, y_n$. Раскрывая вронскиан

$$W(y, y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y & y_1 & \ldots & y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

по первому столбцу и деля его на W, получим уравнение

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_ny=0, \tag{11}$$

в котором $p_1 = -\varphi_1, \ldots, p_n = (-1)^n \varphi_n$, где

$$\varphi_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ y_1^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W}, \ \ldots, \ \varphi_n = \frac{\begin{vmatrix} y_1' & \ldots & y_n' \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W}. \qquad (12)$$

Функции $y_1, \ldots, y_n$ и их линейные комбинации являются решениями уравнения (11). Формулы (11)–(12) вполне аналогичны формулам Виета.

Функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ являются рациональными функциями от функций $y_1, \ldots, y_n$ и от их производных до порядка n. Эти функции зависят лишь от линейного пространства V, натянутого на функции $y_1, \ldots, y_n$, но не зависят от выбора конкретного базиса $y_1, \ldots, y_n$ в пространстве V. Другими словами, функции $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ являются $GL(V)$-инвариантными функциями от $y_1, \ldots, y_n$ и от их производных. Функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ будем называть *основными дифференциальными инвариантами* от $y_1, \ldots, y_n$.

1.5. Аналог теоремы о симметричных функциях для дифференциальных операторов. Как известно из алгебры, всякая рациональная функция от переменных $x_1, \ldots, x_n$, не меняющаяся при перестановках переменных, на самом деле является рациональной функцией основных симметрических функций $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$. Другими словами, всякое рациональное выражение, симметрично зависящее от корней полинома степени n, рационально выражается через коэффициенты этого полинома.

Аналогичная теорема для линейных дифференциальных уравнений была открыта Пикаром.

Теорема 1.3. *Всякая рациональная функция R от линейно независимых функций $y_1, \ldots, y_n$ и их производных, которая является $GL(V)$-инвариантной* (т. е. которая не изменится, если функции $y_1, \ldots, y_n$ заменить их линейными комбинациями $z_1 = a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,n}y_n, \ \ldots, \ z_n = a_{n,1}y_1 + \ldots + a_{n,n}y_n$, при условии, что матрица $A = \{a_{i,j}\}$ невырождена) *на самом деле является рациональной функцией от основных дифференциальных инвариантов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ функций $y_1, \ldots, y_n$ и от производных этих инвариантов.*

Доказательство. Каждая функция y в пространстве V, натянутом на $y_1, \ldots, y_n$, удовлетворяет тождеству $y^{(n)} - \varphi_1 y^{(n-1)} + \ldots +$

$+(-1)^n\varphi_n y = 0$. Дифференцируя это тождество, можно выразить любую производную функции y порядка не меньше n через функцию y, ее производные порядка меньше n, основные дифференциальные инварианты и их производные. Подставляя найденные выражения старших производных функций $y_1, \ldots, y_n$ в рациональную функцию R, мы получим рациональную функцию $\tilde{R}$ от функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, их производных и от элементов фундаментальной матрицы Y, где

$$Y = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Функция $\tilde{R}$ не может меняться при линейных преобразованиях пространства V, натянутого на $y_1, \ldots, y_n$. Любая невырожденная $(n \times n)$-матрица может быть получена как образ фундаментальной матрицы Y при некотором линейном преобразовании пространства V. Рациональная функция $\tilde{R}$ должна быть постоянна на множестве невырожденных матриц, поэтому она постоянна на множестве всех матриц, не зависит от матрицы Y, а зависит лишь от дифференциальных инвариантов и их производных. □

Следствие 1.4. *Всякая рациональная функция от независимых решений $y_1, \ldots, y_n$ линейного дифференциального уравнения и от их производных, которая не меняется при выборе другого базиса $z_1, \ldots, z_n$ в пространстве решений, на самом деле является рациональной функцией от коэффициентов дифференциального уравнения и от их производных.*

§ 2. Группа Галуа линейного дифференциального уравнения

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0 \tag{13}$$

с коэффициентами в некотором функциональном дифференциальном поле K. (Напомним, что мы всегда предполагаем, что поле K содержит все комплексные константы.)

Дифференциальным полиномом над K от функций $u_1, \ldots, u_n$ называется полином с коэффициентами из K от функций $u_1, \ldots, u_n$ и от их производных. *Дифференциальным соотношением* над K между решениями $y_1, \ldots, y_n$ уравнения (13) называется дифференциальный полином над полем K от функций $u_1, \ldots, u_n$, который обращается в нуль при подстановке $u_1 = y_1, \ldots, u_n = y_n$.

Определение. *Группой Галуа дифференциального уравнения* (13) *над дифференциальным полем K* называется подгруппа G группы $GL(V)$ всех линейных преобразований пространства решений V уравнения (13), сохраняющих все дифференциальные соотношения над K между решениями уравнения (т. е. если $A \in G$ и Q — любое соотношение над K между некоторыми решениями $y_1, \ldots, y_n$, то решения $Ay_1, \ldots, Ay_n$ должны быть связаны тем же соотношением Q).

Утверждение 2.1. *Группа Галуа линейного дифференциального уравнения является алгебраической подгруппой в $GL(V)$.*

Доказательство. Для каждого дифференциального соотношения Q между решениями $y_1, \ldots, y_n$ множество линейных преобразований A, для которых соотношение Q выполняется для $Ay_1, \ldots, Ay_n$, является, очевидно, алгебраическим. Пересечение любого числа алгебраических многообразий является алгебраическим многообразием. □

Определение. Функциональное дифференциальное поле P называется *расширением Пикара—Вессио* функционального дифференциального поля K, если существует линейное дифференциальное уравнение (13) с коэффициентами в дифференциальном поле K, такое что P получается присоединением к K всех решений уравнения (13). *Группой Галуа расширения Пикара—Вессио над полем K* называется группа всех автоморфизмов дифференциального поля P, оставляющих на месте все элементы поля K.

Каждый элемент τ из группы Галуа дифференциального поля P над дифференциальным полем K задает линейное преобразование пространства решений и сохраняет все дифференциальные соотношения, определенные над полем K между решениями. Таким образом, группа Галуа дифференциального поля P над K имеет представление в группе Галуа G уравнения (13), определяющее расширение Пикара—Вессио P. Это представление, очевидно, является изоморфизмом групп, т. е. группа Галуа уравнения и группа Галуа заданного им расширения Пикара—Вессио изоморфны. Используя этот изоморфизм, можно определить на группе Галуа расширения Пикара—Вессио структуру алгебраической группы. Если два различных линейных дифференциальных уравнения над полем K задают одно и то же расширение Пикара—Вессио, то группы Галуа этих уравнений изоморфны не только как абстрактные группы, но и как алгебраические группы. Поэтому структура алгебраической группы на группе Галуа расширения Пикара—Вессио определена корректно.

§ 3. Основная теорема теории Пикара—Вессио

Пусть дифференциальное поле P является расширением Пикара—Вессио дифференциального поля K и G — его группа Галуа. Теория Пикара—Вессио описывает все промежуточные дифференциальные поля, т. е. все дифференциальные поля, лежащие в поле P и содержащие поле K. Сопоставим каждой подгруппе Γ группы Галуа G дифференциальное поле $Fix(\Gamma)$, состоящее из элементов поля P, остающихся неподвижными при действии подгруппы Γ (ясно, что $K \subseteq Fix(\Gamma)$). Сопоставим каждому промежуточному дифференциальному полю F, $K \subseteq F \subseteq P$, подгруппу $Gr(F) \subseteq G$, являющуюся группой Галуа расширения Пикара—Вессио P поля F (P является расширением Пикара—Вессио поля K, и поэтому оно автоматически является расширением Пикара—Вессио промежуточного дифференциального поля F, $K \subset F \subset P$). Отображения Fix и Gr устанавливают *соответствие Галуа* между подгруппами группы Галуа и промежуточными дифференциальными полями расширения Пикара—Вессио. Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 3.1 (основная теорема теории Пикара—Вессио). *Соответствие Галуа устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством алгебраических подгрупп группы Галуа и множеством промежуточных дифференциальных полей расширения Пикара—Вессио. Точнее, справедливы следующие утверждения*:

1) *композиция отображений Fix и Gr является тождественным отображением множества промежуточных полей в себя: если F — дифференциальное поле и $K \subseteq F \subseteq P$, то $Fix(Gr(F)) = F$;*

2) *композиция отображений Gr и Fix сопоставляет каждой подгруппе Γ в группе Галуа G ее алгебраическое замыкание $\overline{\Gamma}$ в группе G: если Γ — подгруппа группы Галуа, $\Gamma \subset G$, то $Gr(Fix(\Gamma)) = \overline{\Gamma}$;*

3) *промежуточное дифференциальное поле F, $K \subseteq F \subseteq P$, является расширением Пикара—Вессио поля K, если и только если группа $Gr(F)$ является нормальным делителем группы G. При этом группа*

Галуа расширения Пикара—Вессио F поля K является факторгруппой группы G по нормальному делителю $Gr(F)$.

Докажем полезное характеристическое свойство расширений Пикара—Вессио, непосредственно вытекающее из основной теоремы.

Следствие 3.2. *Дифференциальное поле P является расширением Пикара—Вессио дифференциального поля K, $K \subseteq P$, если и только если существует такая группа* Γ *автоморфизмов дифференциального поля P, что* 1) *она оставляет неподвижными все элементы поля K и только элементы поля K*; 2) *существует лежащее в P конечномерное линейное пространство V над полем констант, инвариантное относительно группы* Γ, *для которого поле P является наименьшим дифференциальным полем, содержащим V и K.*

Доказательство. Расширение Пикара—Вессио обладает указанными свойствами. Это вытекает из п. 1 основной теоремы, примененной к полю $F = K$. Обратно, пусть $y_1, \ldots, y_n$ — базис линейного пространства V, о котором идет речь в п. 2. Коэффициенты линейного дифференциального уравнения n-го порядка, которому удовлетворяют функции $y_1, \ldots, y_n$, инвариантны относительно всех линейных преобразований пространства V. Поэтому они инвариантны относительно группы Γ и лежат в K. Следовательно, P получается из K присоединением всех решений указанного уравнения P и является расширением Пикара—Вессио поля K. □

Что произойдет с группой Галуа линейного дифференциального уравнения, если дифференциальное поле коэффициентов K расширить, заменив его бóльшим дифференциальным полем K_1? Этот вопрос особенно интересен в том случае, когда поле K_1 является расширением Пикара—Вессио поля K. Обозначим через G_1 группу Галуа расширения K_1 дифференциального поля K. Результаты о неразрешимости линейных дифференциальных уравнений основаны на следующей теореме из теории Пикара—Вессио, которую мы приводим без доказательства и которая формулируется вполне аналогично теореме 7.8 из главы 2.

Теорема 3.3 (об изменении группы Галуа уравнения при расширении Пикара—Вессио поля коэффициентов). *При замене дифференциального поля коэффициентов K его расширением Пикара—Вессио K_1 группа Галуа G уравнения заменяется некоторым своим алгебраическим нормальным делителем H. Факторгруппа*

G/H группы G относительно этого нормального делителя изоморфна некоторой алгебраической факторгруппе группы Галуа G_1 нового дифференциального поля K_1 над старым дифференциальным полем K.

§ 4. Простейшие расширения Пикара—Вессио

В этом параграфе рассматриваются следующие простейшие расширения Пикара—Вессио: алгебраическое расширение, присоединение интеграла и присоединение экспоненты интеграла.

4.1. Алгебраическое расширение. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \tag{14}$$

над функциональным дифференциальным полем K и рассмотрим расширение Галуа P, получающееся присоединением к полю K всех решений уравнения (14).

Лемма 4.1. *Поле P является дифференциальным полем. Каждый автоморфизм поля P над полем K, который сохраняет лишь арифметические операции в поле P, автоматически сохраняет и операцию дифференцирования.*

Доказательство. Изменив, если нужно, алгебраическое уравнение (14), можно считать, что оно неприводимо над полем K и что каждый корень x_i уравнения (14) порождает поле P над полем K. Дифференцируя тождество $Q(x_i) = 0$, получим $\frac{\partial Q}{\partial x}(x_i)x_i' + \frac{\partial Q}{\partial t}(x_i) = 0$, где $\frac{\partial Q}{\partial t} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i' x^i$. Полином $\frac{\partial Q}{\partial t}$ не может обращаться в нуль в точке x_i, так как уравнение $Q = 0$ неприводимо. Получаем алгебраическое выражение производной $x_i' = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_i) \Big/ \frac{\partial Q}{\partial t}(x_i)$ корня x_i, которое одинаково для всех корней x_i полинома Q. Отсюда и вытекают оба утверждения леммы. □

Группа Галуа Γ расширения Галуа P над полем K оставляет неподвижными лишь элементы поля K. Линейное пространство V над полем констант, натянутое на корни $x_1, \ldots, x_n$ уравнения (14), инвариантно относительно действия группы Γ. Согласно следствию 3.2 дифференциальное поле P является расширением Пикара—Вессио. Группа Галуа расширения Пикара—Вессио P поля K совпадает с группой Галуа алгебраического уравнения (14). *Основная теорема теории Пикара—Вессио для расширения Пикара—Вессио P дифференциального поля K совпадает с основной теоремой теории Галуа расширения Галуа P поля K.*

4.2. Присоединение интеграла. Пусть y_1 — интеграл над функциональным дифференциальным полем K и $y_1' = a$, $a \in K$, $a \neq 0$.

Однородное дифференциальное уравнение $ay'' - a'y' = 0$ имеет своими независимыми решениями y_1 и единицу. Расширение дифференциального поля K, полученное из K присоединением элемента y_1, является поэтому расширением Пикара—Вессио (напомним, что мы всегда предполагаем, что поле K содержит все комплексные постоянные).

Лемма 4.2. *Интеграл y_1 либо принадлежит полю K, либо трансцендентен над K.*

Доказательство. Допустим, что интеграл y_1 алгебраичен над полем K. Пусть $Q(y) = a_n y^n + \ldots + a_0 = 0$ — неприводимое над K уравнение, которому удовлетворяет y_1. Можно считать, что $n > 1$ и что $a_n = 1$. Продифференцировав тождество $Q(y) = 0$, получим уравнение меньшей степени $nay^{n-1} + \ldots + a_0' = 0$, которому удовлетворяет y_1. Это противоречит неприводимости полинома Q. □

Пусть элемент y_1 трансцендентен над K. Покажем, что единственное независимое дифференциальное соотношение над K, которому удовлетворяет y_1, есть $y_1' = a$. Действительно, используя это соотношение, каждый дифференциальный полином над K от y_1 можно переписать как полином от y_1 с коэффициентами из K. Но ни один такой нетривиальный полином не может обратиться в нуль, так как элемент y_1 трансцендентен над K. Поэтому группа Галуа уравнения $ay'' - a'y' = 0$ состоит из линейных преобразований вида $Ay_1 = y_1 + C$, $A(1) = 1$, где C — любое комплексное число. Итак, *группа Галуа нетривиального интегрального расширения изоморфна аддитивной группе комплексных чисел*.

В терминологии Колчина [20] алгебраическая группа называется *антикомпактной*, если она не содержит элементов конечного порядка, отличных от единицы. *Группа Галуа нетривиального интегрального расширения, очевидно, антикомпактна*.

Утверждение 4.3. *Не существует дифференциальных полей между полем K и $K\langle y\rangle$, где y — интеграл над K, не лежащий в K.*

Доказательство. Действительно, пусть F — такое дифференциальное поле, что $K \subset F \subset K\langle y\rangle$. Пусть $b \in F$ и $b \notin K$. Тогда элемент b представи́м в виде нетривиальной рациональной функции от y с коэффициентами из K. Существование такой функции означает, что элемент y алгебраичен над F. Но элемент y является интегралом над F, так как $y' = a \in K$. Интеграл алгебраичен над дифференциальным полем, если и только если он лежит в этом поле (см. лемму 4.2), т. е. $F = K\langle y\rangle$. □

Утверждение доказывает основную теорему теории Пикара—Вессио для присоединения интеграла. Действительно, группа Галуа C поля $K\langle y\rangle$ над полем K не имеет алгебраических подгрупп, а пара дифференциальных полей $K \subset K\langle y\rangle$ не содержит промежуточных дифференциальных полей.

4.3. Присоединение экспоненты интеграла. Пусть y_1 — экспонента интеграла над функциональным дифференциальным полем K, т. е. $y_1' = ay_1$, где $a \in K$. Расширение поля K элементом y_1 является по определению расширением Пикара—Вессио.

Лемма 4.4. *Пусть экспонента интеграла y_1 является алгебраическим над полем K элементом. Тогда y_1 — радикал над полем K.*

Доказательство. Пусть $Q(y) = a_n y^n + \ldots + a_0 = 0$ — неприводимое над K уравнение, которому удовлетворяет элемент y_1. Можно считать, что $n > 1$, $a_n \neq 0$ и $a_0 = 1$. Продифференцировав тождество $Q(y_1) = 0$, получим уравнение $\sum (a_k' + k a_k a) y^k = 0$, которому удовлетворяет y_1. Это уравнение имеет степень не выше n, но не содержит свободного члена. Все коэффициенты этого уравнения должны тождественно обратиться в нуль, так как в противном случае мы получим противоречие с неприводимостью полинома Q. Равенство $a_n' + n a_n a = 0$ означает, что частное $a_n / y_1^n = c$ является константой. Действительно, из соотношения $y_1' = ay_1$ вытекает, что $(y_1^{-n})' + na(y_1^{-n}) = 0$, т. е. что y_1^{-n} и a_n удовлетворяют одному и тому же уравнению. Поэтому $y^n = a_n / c$. Лемма доказана. □

Допустим, что элемент y_1 трансцендентен над K. Покажем, что в этом случае единственное независимое дифференциальное соотношение над K, которому удовлетворяет y_1, есть $y_1' = ay_1$. Действительно, используя это соотношение, каждый дифференциальный полином над K от y_1 можно переписать как полином от y_1 с коэффициентами из K. Но ни один такой нетривиальный полином не может обратиться в нуль, так как y_1 трансцендентен над K. Поэтому группа Галуа уравнения $y' = ay$ состоит из линейных преобразований вида $Ay_1 = Cy_1$, где $C \neq 0$ — любое ненулевое комплексное число. Итак, *группа Галуа неалгебраического расширения, являющегося присоединением экспоненты интеграла, совпадает с мультипликативной группой $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел.*

Экспонента интеграла над K является алгебраическим элементом y над K, если и только если y — радикал над K. Поэтому *если присоединение экспоненты интеграла является алгебраическим расширением, то его группа Галуа является конечной мультипликативной подгруппой в $\mathbb{C}^*$.*

В терминологии Колчина [20] алгебраическая группа называется *квазикомпактной*, если каждая ее нееденичная подгруппа содержит элементы конечного порядка, отличные от единицы. *Группа Галуа неалгебраического расширения, полученного присоединением экспоненты интеграла, очевидно, квазикомпактна.*

Утверждение 4.5. *Пусть y — экспонента интеграла над K и элемент y трансцендентен над K. Тогда каждому неотрицательному целому числу n можно поставить в соответствие дифференциальное поле между полями K и $K\langle y\rangle$. Именно, это дифференциальное поле K_n, состоящее из рациональных функций от элемента y^n с коэффициентами из поля K. Для разных n поля K_n различны. Всякое промежуточное дифференциальное поле совпадает с некоторым полем K_n.*

Доказательство. Пусть F — дифференциальное поле, строго содержащее поле K и лежащее в поле $K\langle y\rangle$. Повторяя рассуждения из утверждения 4.3, получаем, что элемент y алгебраичен над F. Элемент y является экспонентой интеграла над F. Поэтому неприводимое над полем F алгебраическое уравнение, которому удовлетворяет y, имеет вид $y^n - a = 0$, где $a \in F$ (см. лемму 4.4), следовательно, $K_n \subseteq F$. Поле K_n должно совпадать с F. Действительно, в противном случае существует элемент $b \in F$, $b \notin K_n$. Элемент b является некоторой рациональной функцией R от y, и соотношение $R(y)$ не является следствием уравнения $y^n = a$. Это противоречит неприводимости уравнения $y^n = a$. Противоречие доказывает, что $K_n = F$. Поля K_n при разных n различны в силу трансцендентности элемента y над K. □

Утверждение доказывает основную теорему теории Пикара—Вессио для присоединения экспоненты интеграла. Действительно, каждая собственная алгебраическая подгруппа группы $\mathbb{C}^*$ является группой корней n-й степени из единицы для некоторого n. Промежуточное между K и $K\langle y\rangle$ дифференциальное поле состоит в точности из элементов поля $K\langle y\rangle$, которые остаются на месте при действии группы корней n-й степени из единицы на $K\langle y\rangle$.

§ 5. Разрешимость дифференциальных уравнений

Скажем, что алгебраическая группа G является *разрешимой, k-разрешимой или почти разрешимой в категории алгебраических групп*, если у нее существует нормальная башня алгебраических подгрупп $G = G_0 \supset \ldots \supset G_m = e$ со следующими свойствами:

а) для разрешимых групп: для каждого $i = 1, \ldots, m$ факторгруппа G_{i-1}/G_i коммутативна (т. е. группа G разрешима);

б) для k-разрешимых групп: для каждого $i = 1, \ldots, m$ либо глубина группы G_i в группе G_{i-1} не превосходит k, либо группа G_{i-1}/G_i коммутативна;

в) для почти разрешимых групп: для каждого $i = 1, \ldots, m$ либо индекс группы G_i в G_{i-1} конечен, либо группа G_{i-1}/G_i коммутативна.

Теорема 5.1 (Пикара—Вессио). *Линейное дифференциальное уравнение над дифференциальным полем K решается в квадратурах, в k-квадратурах или обобщенных квадратурах, если и только если группа Галуа уравнения над полем K является соответственно разрешимой, k-разрешимой или почти разрешимой группой в категории алгебраических групп.*

Замечание. В классической теореме Пикара—Вессио не обсуждается вопрос о разрешимости уравнений в k-квадратурах. Мы включили этот вопрос в теорему, потому что, во-первых, ответ на него аналогичен и, во-вторых, он переносится в топологическую теорию Галуа.

В этом параграфе мы докажем лишь необходимость условий на группу Галуа для разрешимости уравнения. Доказательство достаточности отложим до § 7. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. *Если линейное дифференциальное уравнение решается в квадратурах, в k-квадратурах или в обобщенных квадратурах, то группа Галуа G этого уравнения является соответственно разрешимой, k-разрешимой или почти разрешимой группой в категории алгебраических групп.*

Доказательство. Разрешимость уравнений в обобщенных квадратурах над полем K означает существование цепочки дифференциальных полей $K = K_0 \subset \ldots \subset K_N$, в которой первое поле совпадает с исходным полем K, последнее поле K_N содержит все решения дифференциального уравнения и для каждого $i = 1, \ldots, N$ поле K_i получается из поля K_{i-1} либо присоединением интеграла, либо присоединением экспоненты интеграла, либо присоединением всех решений алгебраического уравнения. (В случае разрешимости в квадратурах последний из этих типов расширений запрещен. В случае разрешимости в k-квадратурах допускается лишь присоединение корней алгебраических уравнений степени не выше чем k.)

Пусть $G = G_0 \supset \ldots \supset G_m = e$ — убывающая цепочка групп, в которой группа G_i — группа Галуа исходного уравнения над полем K_i. Согласно основной теореме 4.4 факторгруппа G_{i-1}/G_i является факторгруппой группы Галуа расширения Пикара—Вессио K_i поля K_{i-1}. Если это расширение является присоединением интеграла или экспоненты интеграла, то группа G_{i-1}/G_i коммутативна как факторгруппа коммутативной группы (см. п. 4.2–4.3). Если расширение K_i поля K_{i-1} получено присоединением всех корней алгебраического уравнения, то факторгруппа G_{i-1}/G_i конечна. Если это алгебраическое уравнение имеет степень не выше k, то между группами $G_i \supset G_{i-1}$ можно вставить цепочку нормальных делителей $G_i = G_{i,1} \supset \supset \ldots \supset G_{i,p} = G_{i-1}$, в которой глубина группы $G_{i,j}$ в $G_{i,j-1}$ не превосходит k (см. § 9 главы 2). Доказательство теоремы закончено. □

Только что доказанную теорему можно сформулировать следующим образом.

Если расширение Пикара—Вессио является расширением Лиувилля, k-расширением Лиувилля или обобщенным расширением Лиувилля, то его группа Галуа является соответственно разрешимой, k-разрешимой или почти разрешимой группой в категории алгебраических групп.

В такой переформулировке теорема становится применимой и к алгебраическим уравнениям над дифференциальными полями. Она дает более сильные результаты о неразрешимости алгебраических уравнений.

Теорема 5.3. *Если группа Галуа алгебраического уравнения над дифференциальным полем K неразрешима, то это алгебраическое уравнение не только не решается в радикалах, но и не решается в* *квадратурах. Если группа Галуа не является k-разрешимой, то алгебраическое уравнение не решается в k-квадратурах над K.*

§ 6. Алгебраические матричные группы и необходимые условия разрешимости

Группа Галуа линейного дифференциального уравнения является алгебраической матричной группой. Такие группы обладают общими свойствами, которые помогают переформулировать условия разрешимости, k-разрешимости и почти разрешимости группы Галуа и доказать, что эти условия являются достаточными (см. § 7) для разрешимости уравнения.

Отметим прежде всего, что *всякая алгебраическая матричная группа является группой Ли*. Действительно, множество особых точек всякого алгебраического многообразия имеет коразмерность не меньше 1. Но групповым преобразованием любая точка группы переводится в любую другую точку. Поэтому около каждой точки группа устроена одинаково, и, следовательно, множество ее особых точек пусто. *Компонента связности единицы алгебраической группы является нормальным делителем конечного индекса в этой группе.* Действительно, компонента связности единицы является нормальным делителем во всякой группе Ли, и каждое алгебраическое многообразие имеет лишь конечное число компонент связности.

Для дальнейшего ключевую роль играет следующая знаменитая теорема Ли, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 6.1 (Ли). *Связная разрешимая матричная группа Ли в некотором базисе приводится к треугольному виду.*

Утверждение 6.2. *Алгебраическая матричная группа является почти разрешимой группой в категории алгебраических групп, если и только если все матрицы ее компоненты связности единицы в некотором базисе одновременно приводятся к треугольному виду.*

Доказательство. Всякая группа, состоящая из треугольных матриц, разрешима. Это доказывает утверждение в одну сторону. Пусть $G = G_0 \supset \ldots \supset G_n = e$ — нормальная башня алгебраических подгрупп группы G, для которой каждая факторгруппа G_i/G_{i-1} либо коммутативна, либо конечна. Рассмотрим компоненты связности единицы этих групп. Они образуют нормальную башню $G^0 = G_0^0 \supset \ldots$

$\ldots \supset G_n^0 = e$ алгебраических подгрупп компоненты связности единицы G^0 группы G. При этом, если факторгруппа G_{i-1}/G_i коммутативна, то факторгруппа G_{i-1}^0/G_i^0 тоже коммутативна. Если факторгруппа G_{i-1}/G_i конечна, то группы G_{i-1}^0 и G_i^0 совпадают. Утверждение доказано. □

Утверждение 6.3. *Алгебраическая матричная группа G является разрешимой или k-разрешимой группой в категории алгебраических групп, если и только если все матрицы ее компоненты связности единицы G^0 в некотором базисе приводятся к треугольному виду и конечная факторгруппа G/G_0 соответственно разрешима или k-разрешима.*

Доказательство. Согласно утверждению 6.2 группа G^0 является треугольной. Кроме того, группа G^0 является нормальным делителем конечного индекса в группе G. Конечная факторгруппа G/G_0 является соответственно разрешимой или k-разрешимой группой. В обратную сторону утверждение очевидно. □

В группах матриц есть замечательная топология Зарисского, сопоставляющая каждой группе $\Gamma \subset GL(V)$ ее алгебраическое замыкание $\overline{\Gamma}$. Эта операция позволяет обобщить утверждения 6.2 и 6.3 на произвольные матричные группы.

Утверждение 6.4. 1. *Матричная группа является почти разрешимой группой, если и только если у нее существует треугольный нормальный делитель H конечного индекса. Матричная группа является k-разрешимой или разрешимой, если и только если конечная факторгруппа G/H группы G по некоторому треугольному нормальному делителю H конечного индекса является соответственно k-разрешимой или разрешимой группой.*

2. *Алгебраическая матричная группа G является почти разрешимой, k-разрешимой или разрешимой группой в категории алгебраических групп, если и только если она является соответственно почти разрешимой, k-разрешимой или разрешимой группой.*

Доказательство. Пусть $G = G_0 \supset \ldots \supset G_n = e$ — нормальная башня группы G, тогда замыкание в топологии Зарисского групп из этой башни образует нормальную башню алгебраических групп $\overline{G} = \overline{G}_0 \supset \ldots \supset \overline{G}_n = e$. При этом, если группа G_{i-1}/G_i коммутативна, конечна или если группа G_i имеет в G_{i-1} глубину не больше k, то группа $\overline{G}_{i-1}/\overline{G}_i$ будет соответственно коммутативной, конечной или группа $\overline{G}_i$ будет иметь в группе $\overline{G}_{i-1}$ глубину не больше k. Это доказывает все пункты утверждения в одну сторону. В другую сторону все утверждения очевидны. □

§ 7. Достаточное условие разрешимости дифференциальных уравнений

Группу автоморфизмов Γ дифференциального поля F с дифференциальным полем неподвижных элементов K назовем *допустимой группой автоморфизмов*, если существует конечномерное пространство V над полем констант, инвариантное относительно группы Γ и такое, что $K\langle V\rangle = F$. Согласно теории Пикара—Вессио (см. следствие 3.2) дифференциальное поле F является расширением Пикара—Вессио дифференциального поля K, если и только если существует допустимая группа автоморфизмов дифференциального поля F с дифференциальным полем неподвижных элементов K. В общем случае существование допустимой группы преобразований для расширения Пикара—Вессио совсем не очевидно и является частью основной теоремы этой теории. Однако для обширного класса случаев существование допустимой группы автоморфизмов известно априори. Такой класс случаев доставляют расширения поля рациональных функций всеми решениями любого линейного дифференциального уравнения типа Фукса (см. § 1 главы 6). В этих случаях группа монодромии уравнения играет роль группы Γ.

Если группа Γ разрешима, то элементы поля F представляются в квадратурах через элементы поля K. Конструкция такого представления по существу относится к линейной алгебре и не использует основных теорем Пикара—Вессио. Допустимая группа автоморфизмов Γ изоморфна индуцированной группе линейных преобразований пространства V, и ее можно рассматривать как матричную группу.

Теорема 7.1 (Лиувилль). *Если все преобразования допустимой группы Γ приводятся в некотором базисе к треугольному виду, то дифференциальное поле F является расширением Лиувилля дифференциального поля K.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства V, в котором каждое преобразование $\mu \in \Gamma$ имеет вид $\mu(e_i) = \sum\limits_{j \leqslant i} a_{i,j} e_j$. Рассмотрим векторное пространство $\widetilde{V}$, натянутое на векторы $\tilde{e}_i = \left(\frac{e_i}{e_1}\right)'$, где $i=2, \ldots, n$. Пространство $\widetilde{V}$ инвариантно относительно группы, причем каждое преобразование μ группы Γ в базисе $\tilde{e}_i$ имеет треугольный вид. Действительно,

$$\mu(\tilde{e}_i)=\mu\left(\left[\frac{e_i}{e_1}\right]'\right)=\left(\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}+\sum_{2\leqslant j\leqslant i}\frac{a_{i,j}}{a_{1,1}}\frac{e_j}{e_1}\right)'=\sum_{2\leqslant j\leqslant i}\frac{a_{i,j}}{a_{1,1}}\tilde{e}_j.$$

Пространство $\widetilde{V}$ имеет меньшую размерность, чем пространство V, поэтому можно считать, что дифференциальное поле $K\langle\widetilde{V}\rangle$ есть расширение Лиувилля дифференциального поля K. Для всякого $\mu\in\Gamma$ имеем $\mu\left(\frac{e_1'}{e_1}\right)=\frac{a_{1,1}e_1'}{a_{1,1}e_1}=\frac{e_1'}{e_1}$, следовательно, элемент $\frac{e_1'}{e_1}=a$ лежит в дифференциальном поле инвариантов K. Дифференциальное поле F получается из дифференциального поля K присоединением экспоненты интеграла e_1 от элемента a и интегралов $\frac{e_i}{e_1}$ от элементов $\tilde{e}_i$, где $i=2, \ldots, n$. □

Утверждение 7.2. *Если группа* Γ *допустимых автоморфизмов поля* F *с полем неподвижных элементов* K *почти разрешима, то существует инвариантное относительно группы* Γ *поле* K_0, *такое что*: 1) *поле* F *является расширением Лиувилля поля* K_0; 2) *индуцированная группа автоморфизмов поля* K_0 *конечна, при этом каждый элемент поля* K_0 *является алгебраическим над полем* K; 3) *если группа* Γ *разрешима, то каждый элемент поля* K_0 *представи́м в радикалах над полем* K.

Доказательство. Пусть V — инвариантное относительно группы Γ пространство, такое что $K\langle V\rangle=F$.

Из утверждения 6.2 вытекает, что группа Γ обладает нормальным делителем Γ_0 конечного индекса, приводящимся в некотором базисе пространства V к треугольному виду. Пусть K_0 — дифференциальное поле инвариантов группы Γ. Согласно лемме 7.1 дифференциальное поле F есть расширение Лиувилля дифференциального поля K_0.

Очевидно (см. утверждение 1.3 главы 2), что поле K_0 инвариантно относительно действия группы Γ и индуцированная группа автоморфизмов этого поля $\widetilde{\Gamma}_0$ является конечной факторгруппой группы Γ. Поэтому каждый элемент поля K_0 алгебраичен над K (см. теорему 3.2 главы 2). Если исходная группа Γ разрешима, то ее конечная факторгруппа $\widetilde{\Gamma}_0$ тоже разрешима. В этом случае любой элемент поля K_0 выражается в радикалах через элемент поля K (см. теорему 1.2 главы 2). □

Доказательство следующего утверждения опирается на теорию Галуа.

Утверждение 7.3. *Если в условиях утверждения 7.2 группа* Γ *k-разрешима, то каждый элемент поля* K_0 *выражается через элементы поля* K *при помощи радикалов и решения алгебраических уравнений степени не выше* k.

Доказательство. Так как группа $\widetilde{\Gamma}_0$ конечна, то расширение K_0 поля K является расширением Галуа поля K. Если группа Γ_0 k-разрешима, то ее конечная факторгруппа тоже k-разрешима. Утверждение 7.3 теперь вытекает из теоремы 4.1 главы 2. □

Закончим доказательство теоремы Пикара—Вессио (см. § 5).

Согласно основной теореме 3.1 для всякого линейного дифференциального уравнения над дифференциальным полем K его группа Галуа оставляет неподвижными лишь элементы поля K. Поэтому применимы только что доказанные утверждения 7.2 и 7.3, что и доказывает достаточность условий на группу Галуа в теореме Пикара—Вессио.

Теорема Пикара—Вессио не только доказывает критерий Лиувилля—Мордухай-Болтовского (см. § 5 главы 1), но позволяет его обобщить на случай разрешимости в квадратурах и k-квадратурах. Именно, справедливы следующие утверждения.

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка решается в обобщенных квадратурах над дифференциальным полем K, если и только если, во-первых, у него существует решение y_1, удовлетворяющее уравнению $y_1' = ay_1$, где a — элемент, принадлежащий некоторому алгебраическому расширению K_1, и, во-вторых, если дифференциальное уравнение порядка $n-1$ на функцию $z = y' - ay$ с коэффициентами из поля K_1, полученное из исходного уравнения процедурой понижения порядка (см. п. 1.2), решается в обобщенных квадратурах. Аналогичные утверждения справедливы и для разрешимости линейного дифференциального уравнения в квадратурах и в k-квадратурах. Для разрешимости в квадратурах надо дополнительно требовать, чтобы алгебраическое расширение K_1 получилось из K присоединением радикалов, а для разрешимости в k-квадратурах — чтобы расширение K_1 получалось из K присоединением радикалов и корней алгебраических уравнений степени не выше k. Для доказательства этих утверждений достаточно посмотреть на конструкцию решений дифференциальных уравнений.

Дифференциальная алгебра позволяет существенно уточнить этот критерий. *Для линейных дифференциальных уравнений, коэффициентами которых являются рациональные функции с рациональными коэффициентами, удается получить конечный алгоритм, позволяющий определить, решается ли уравнение в обобщенных квадратурах, и, если решается, найти его решение* [33]. Алгоритм использует: 1) оценку степени расширения K_1 поля K, зависящую лишь от порядка уравнения и вытекающую из общих соображений теории групп (см. п. 2.2 главы 6); 2) теорию нормальных форм линейных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки; 3) теорию исключения для дифференциальных уравнений и неравенств от нескольких функций (найденную Зайденбергом и обобщающую теорему Тарского—Зайденберга на случай дифференциальных полей).

§ 8. Другие виды разрешимости

Колчин дополнил теорему Пикара—Вессио [20]. Он рассмотрел задачи о разрешимости линейных уравнений отдельно в интегралах и отдельно в экспонентах интегралов и варианты этих задач, в которых допускаются алгебраические расширения.

При определении расширений Лиувилля использовались три вида расширений: алгебраические расширения, присоединения интегралов и присоединения экспонент интегралов. Можно определить более частные виды разрешимости, используя в качестве «строительных кирпичиков» только некоторые из этих расширений (и используя лишь специальные алгебраические расширения). Перечислим основные варианты:

1) разрешимость в интегралах,
2) разрешимость в интегралах и радикалах,
3) разрешимость в интегралах и в алгебраических функциях,
4) разрешимость в экспонентах интегралов,
5) разрешимость в экспонентах интегралов и в алгебраических функциях.

Расшифруем третье из этих определений.

Рассмотрим произвольную цепочку дифференциальных полей $K = K_0 \subseteq \ldots \subseteq K_n$, в которой каждое следующее поле K_i, $i = 1, \ldots, n$, либо получается из предыдущего поля K_{i-1} присоединением интеграла над K_{i-1}, либо является алгебраическим расширением поля K_{i-1}. Каждый элемент дифференциального поля K_n по определению *представи́м в интегралах и алгебраических функциях* над полем K. Уравнение решается над полем K в интегралах и в алгебраических функциях, если каждое его решение представлено в интегралах и в алгебраических функциях.

Аналогично расшифровываются и другие виды разрешимости 1–5.

Замечание. 1. Отдельно рассматривать разрешимость в радикалах и экспонентах интегралов не надо, так как каждый радикал является экспонентой интеграла.

2. Выше мы рассматривали специальные алгебраические расширения, полученные присоединением корней алгебраических уравнений степени не выше k. Можно было бы, скажем, определить k-разрешимость в интегралах, комбинируя подобные алгебраические расширения с присоединениями интегралов. Мы этого не делаем, чтобы не загромождать текст и из-за отсутствия интересных примеров.

Определение 1. Скажем, что матричная группа G является *специальной треугольной группой*, если существует базис, в котором все матрицы группы G одновременно приводятся к треугольному виду и все собственные числа каждой матрицы из группы G равны единице.

Определение 2. Скажем, что матричная группа *диагональна*, если существует базис, в котором все матрицы группы диагональны.

Теорема 8.1 (Колчина о разрешимости в интегралах). *Линейное дифференциальное уравнение над дифференциальным полем K решается в интегралах, в интегралах и радикалах, в интегралах и алгебраических функциях, если и только если группа Галуа уравнения над K соответственно является специальной треугольной группой, разрешима и содержит специальный треугольный нормальный делитель конечного индекса, содержит специальный треугольный нормальный делитель конечного индекса.*

Теорема 8.2 (Колчина о разрешимости в экспонентах интегралов). *Линейное дифференциальное уравнение над дифференциальным полем K решается в экспонентах интегралов и в экспонентах интегралов и алгебраических функциях, если и только если его группа Галуа над K соответственно разрешима и содержит* *диагональный нормальный делитель конечного индекса, содержит диагональный нормальный делитель конечного индекса.*

Несколько слов о доказательстве этих теорем. Группа Галуа присоединения интеграла антикомпактна (см. п. 4.2). Группа Галуа присоединения экспоненты интеграла квазикомпактна (см. п. 4.3). Колчин развил теорию антикомпактных и квазикомпактных алгебраических матричных групп. Вот одно несложное утверждение из этой теории.

Утверждение 8.3 [20]. 1. *Алгебраическая матричная группа квазикомпактна, если и только если каждая матрица группы приводится к диагональному виду.*

2. *Алгебраическая матричная группа антикомпактна, если и только если все собственные числа каждой матрицы группы равны единице.*

Теория квазикомпактных и антикомпактных групп вместе с основной теоремой теории Пикара—Вессио позволили Колчину доказать его теоремы о разрешимости в интегралах и о разрешимости в экспонентах интегралов.

Разумеется, теоремы Колчина, так же как и теорема Пикара—Вессио, справедливы не только для линейных дифференциальных уравнений, но и для расширений Пикара—Вессио (каждое такое расширение порождено решениями линейного дифференциального уравнения). Сформулируем критерий для различных видов представимости всех элементов расширения Пикара—Вессио с треугольной группой Галуа. Этот критерий легко вытекает из теорем Колчина и теоремы Пикара—Вессио. Мы применим этот критерий в п. 2.3 главы 6 при обсуждении различных видов разрешимости систем уравнений типа Фукса с малыми коэффициентами.

Расширение с треугольной группой Галуа (ср. [20]). *Пусть расширение Пикара—Вессио F дифференциального поля K имеет треугольную группу Галуа. Тогда каждый элемент поля F*

1) *представи́м в квадратурах над полем K*;

2) *представи́м в интегралах и алгебраических функциях или в интегралах и радикалах*[1] *над полем K, если и только если собственные числа всех матриц группы Галуа — корни из единицы*;

[1]Эти виды разрешимости различаются, если не требовать треугольности группы Галуа.

3) *представи́м в интегралах над полем K, если и только если все собственные числа всех матриц группы Галуа равны единице*;

4) *представи́м в экспонентах интегралов и в алгебраических функциях или в экспонентах интегралов*[1] *над полем K, если и только если группа Галуа диагональна*;

5) *представи́м в алгебраических функциях или в радикалах*[1] *над полем K, если и только если группа Галуа диагональна, а все собственные числа всех матриц группы Галуа — корни из единицы*;

6) *лежит в поле K, если и только если группа Галуа тривиальна.*

Глава 4

НАКРЫТИЯ И ТЕОРИЯ ГАЛУА

Эта глава посвящена геометрии накрытий и ее связи с теорией Галуа. Существует удивительная аналогия между классификацией накрытий над связным, локально связным и локально односвязным топологическим пространством и основной теоремой теории Галуа. Мы формулируем результаты классификации накрытий таким образом, чтобы эта аналогия бросалась в глаза.

Есть целый ряд близких задач о классификации накрытий. Кроме обычной классификации, есть классификация накрытий с отмеченными точками. Можно фиксировать нормальное накрытие и классифицировать накрытия (и накрытия с отмеченными точками), подчиненные этому нормальному накрытию. Для наших целей необходимо рассматривать разветвленные накрытия над римановыми поверхностями и решать аналогичные классификационные задачи для разветвленных накрытий и т. д.

В § 1 рассматриваются накрытия над топологическими пространствами. Мы подробно обсуждаем классификацию накрытий с отмеченными точками над связным, локально связным и локально односвязным топологическим пространством. Остальные классификационные задачи легко сводятся к этой классификации.

В § 2 рассматриваются конечнолистные разветвленные накрытия над римановыми поверхностями. Разветвленные накрытия сначала определяются как собственные отображения вещественных многообразий в риманову поверхность, имеющие особенности, характерные для комплексных аналитических отображений. Затем показывается, что разветвленные накрытия имеют естественную аналитическую структуру. Обсуждается операция пополнения накрытий над римановой поверхностью X, из которой удалено дискретное множество O. Эта операция одинаково применима как к накрытиям, так и к накрытиям с отмеченными точками. В результате ее применения из конечнолистного накрытия над $X \setminus O$ получается разветвленное конечнолистное накрытие над X.

Классификация конечнолистных разветвленных накрытий с фиксированным множеством ветвления почти дословно повторяет аналогичную классификацию неразветвленных накрытий. Поэтому мы ограничиваемся лишь формулировками результатов.

Для сравнения основной теоремы теории Галуа и классификации разветвленных накрытий полезен следующий факт. Множество орбит действия конечной группы на одномерном комплексном аналитическом многообразии имеет естественную структуру комплексного аналитического многообразия. В доказательстве используется резольвента Лагранжа (в теории Галуа резольвенты Лагранжа используются для доказательства разрешимости в радикалах уравнений с разрешимой группой Галуа).

В п. 2.4 операция пополнения накрытий применяется для определения римановой поверхности неприводимого алгебраического уравнения над полем $K(X)$ мероморфных функций на многообразии X.

Параграф 3 основан на теории Галуа и теореме существования Римана (которую мы принимаем без доказательства) и посвящен связи между конечнолистными разветвленными накрытиями над многообразием X и алгебраическими расширениями поля $K(X)$. Показывается, что поле $K(M)$ мероморфных функций на M является алгебраическим расширением поля $K(X)$ мероморфных функций на X и что каждое алгебраическое расширение поля $K(X)$ получается таким способом.

Ключевую роль играет следующая конструкция. Фиксируем дискретное подмножество O в многообразии X и точку $a \in X \setminus O$. Рассмотрим поле $P_a(O)$, состоящее из мероморфных ростков в точке $a \in X$, которые мероморфно продолжаются до конечнозначных функций на $X \setminus O$, имеющих алгебраические особенности в точках множества O. Операция мероморфного продолжения ростка вдоль замкнутой кривой задает действие фундаментальной группы $\pi_1(X \setminus O, a)$ на поле $P_a(O)$. К действию этой группы автоморфизмов поля $P_a(O)$ применяются результаты теории Галуа. Описывается соответствие между подполями поля $P_a(O)$, являющимися алгебраическими расширениями поля $K(X)$, и подгруппами конечного индекса в фундаментальной группе $\pi_1(X \setminus O, a)$. Доказывается, что это соответствие является взаимно однозначным. В доказательстве кроме теории Галуа используется теорема существования Римана.

Нормальные разветвленные накрытия над связным комплексным многообразием X связаны с расширениями Галуа поля $K(X)$.

Основная теорема теории Галуа для таких расширений имеет прозрачную геометрическую интерпретацию.

Локальный вариант связи между разветвленными накрытиями и алгебраическими расширениями позволяет описать алгебраические расширения поля сходящихся рядов Лорана. Расширения этого поля аналогичны алгебраическим расширениям конечного поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (при этой аналогии замкнутой вещественной кривой на плоскости, обходящей вокруг точки 0, соответствует автоморфизм Фробениуса).

В конце главы рассматриваются компактные одномерные комплексные многообразия. С одной стороны, соображения теории Галуа показывают, что поле мероморфных функций на компактном многообразии является конечнопорожденным расширением поля комплексных чисел степени трансцендентности один (в доказательстве используется теорема существования Римана). С другой стороны, разветвленные накрытия позволяют достаточно явно описать все алгебраические расширения поля рациональных функций от одного переменного. Группа Галуа такого расширения имеет геометрический смысл: она совпадает с группой монодромии римановой поверхности алгебраической функции, определенной этим уравнением. Поэтому теория Галуа доставляет топологическое препятствие к представимости алгебраических функций в радикалах.

§ 1. Накрытия над топологическими пространствами

Этот параграф посвящен накрытиям над связным, локально связным и локально односвязным топологическим пространством. Есть целый ряд близких задач о классификации накрытий. В п. 1.1 мы подробно обсуждаем классификацию накрытий с отмеченными точками. Остальные классификационные задачи (см. п. 1.3) легко сводятся к этой классификации. В п. 1.2 обсуждается соответствие между подгруппами фундаментальной группы и накрытиями с отмеченными точками. В п. 1.4 описывается удивительная формальная аналогия между классификацией накрытий и теорией Галуа.

1.1. Классификация накрытий с отмеченными точками. Непрерывные отображения f_1 и f_2 топологических пространств Y_1 и

Y_2 в топологическое пространство X называются *левоэквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h\colon Y_1 \to Y_2$, коммутирующий с отображениями f_1 и f_2, т. е. такой, что $f_1 = f_2 \circ h$. Топологическое пространство Y вместе с проекцией $f\colon Y \to X$ называется *накрытием со слоем* D над топологическим пространством X, где D — дискретное множество, если у каждой точки $c \in X$ существует окрестность U, такая что отображение проекции произведения $U \times D$ на первый сомножитель левоэквивалентно отображению $f\colon Y_U \to U$, где $Y_U = f^{-1}(U)$. Для накрытий справедлива теорема о накрывающей гомотопии (см. [35]), которую мы не будем доказывать. Эта теорема нам будет нужна в случаях, когда комплекс W_k является точкой или отрезком $[0, 1]$.

Теорема 1.1 (о накрывающей гомотопии). *Пусть $f\colon Y \to X$ — накрытие, W_k — k-мерный клеточный комплекс и $F\colon W_k \to X$, $\widetilde{F}\colon W_k \to Y$ — его отображения в X и Y, такие что $\pi \circ \widetilde{F} = F$. Тогда для всякой гомотопии $F_t\colon W_k \times [0, 1] \to X$ отображения F, $F_0 = F$, существует, и притом единственное, ее поднятие до гомотопии $\widetilde{F}_t\colon W_k \times [0, 1] \to Y$ отображения $\widetilde{F}$, $\widetilde{F}_0 = \widetilde{F}$, $\pi(\widetilde{F}_t) = F_t b$.*

Рассмотрим накрытие $f\colon Y \to X$. Гомеоморфизм $h\colon Y \to Y$ называется *преобразованием наложения* этого накрытия, если выполняется равенство $f = f \circ h$. Преобразования наложения образуют группу. Накрытие называется *нормальным*, если его группа преобразований наложения транзитивно действует на каждом слое $f^{-1}(a)$, $a \in X$, накрытия и выполняются следующие топологические условия на пространства X и Y: пространство Y связно, пространство X локально связно и локально односвязно.

Тройка $f\colon (Y, b) \to (X, a)$, состоящая из пространств с отмеченными точками (X, a), (Y, b) и отображения f, называется *накрытием с отмеченными точками*, если $f\colon Y \to X$ — накрытие и $f(b) = a$. Накрытия с отмеченными точками называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм между накрывающими пространствами, коммутирующий с проекциями и переводящий отмеченную точку в отмеченную. Обычно из обозначений видно, идет ли речь о накрытиях или о накрытиях с отмеченными точками. В таких случаях мы для краткости иногда будем говорить о накрытиях, опуская слова «с отмеченными точками».

Для накрытия с отмеченными точками $f\colon (Y, b) \to (X, a)$ определен гомоморфизм $f_*\colon \pi_1(Y, b) \to \pi_1(X, a)$ фундаментальной группы

$\pi_1(Y, b)$ пространства Y с отмеченной точкой b в фундаментальную группу $\pi_1(X, a)$ пространства X с отмеченной точкой a.

Лемма 1.2. *Для накрытия с отмеченными точками индуцированный гомоморфизм фундаментальных групп не имеет ядра.*

Доказательство. Пусть замкнутая кривая $\gamma\colon [0, 1] \to X$, $\gamma(0) = \gamma(1) = a$, в пространстве X является образом $f \circ \tilde{\gamma}$ замкнутой кривой $\tilde{\gamma}\colon [0, 1] \to Y$, $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = b$, в пространстве Y. Пусть кривая γ гомотопна тождественной кривой в пространстве кривых с закрепленными концами на X. Тогда кривая $\tilde{\gamma}$ гомотопна тождественной кривой в пространстве кривых с закрепленными концами на Y. Для доказательства достаточно поднять гомотопию с закрепленными концами на Y. $\square$

Для всякого связного, локально связного и локально односвязного топологического пространства X с отмеченной точкой a справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3 (о классификации накрытий с отмеченными точками). 1. *Для каждой подгруппы G в фундаментальной группе пространства (X, a) существует связное пространство (Y, b) и накрытие над (X, a) с накрывающим пространством (Y, b), для которого образ фундаментальной группы пространства (Y, b) совпадает с подгруппой G.*

2. *Если для двух накрытий над (X, a) со связными накрывающими пространствами (Y_1, b_1) и (Y_2, b_2) образы фундаментальных групп этих пространств в фундаментальной группе пространства (X, a) совпадают, то два накрытия эквивалентны.*

Доказательство. 1. Рассмотрим пространство $\widehat{\Omega}(X, a)$ кривых $\gamma\colon [0, 1] \to X$ на X, начинающихся в точке $\gamma(0) = a \in X$, и его подпространство $\widehat{\Omega}(X, a, a_1)$, состоящее из кривых, заканчивающихся в точке a_1. В пространствах $\widehat{\Omega}(X, a)$, $\widehat{\Omega}(X, a, a_1)$ введем топологию равномерной сходимости и следующее соотношение эквивалентности. Скажем, что кривые γ_1 и γ_2 эквивалентны, если они заканчиваются в одной и той же точке a_1 и если кривая γ_1 гомотопна кривой γ_2 в пространстве $\widehat{\Omega}(X, a, a_1)$ кривых с закрепленными концами. Обозначим через $\Omega(X, a)$ и $\Omega(X, a, a_1)$ факторпространства пространств $\widehat{\Omega}(X, a)$ и $\widehat{\Omega}(X, a, a_1)$ по этому соотношению эквивалентности. На пространстве $\Omega(X, a)$ действует фундаментальная группа $\pi_1(X, a)$ при помощи умножений справа. Для фиксированной группы $G \subset \pi_1(X, a)$ обозначим через $\Omega_G(X, a)$ пространство орбит действия группы G на $\Omega(X, a)$. Точки в $\Omega_G(X, a)$ — это элементы пространства $\widehat{\Omega}(X, a, a_1)$, заданные с точностью до гомотопии с закрепленными концами и умножения справа на элементы подгруппы G. В этом пространстве есть отмеченная точка $\tilde{a}$ — класс эквивалентности постоянной кривой $\gamma(t) \equiv a$. Отображение $f\colon (\Omega_G(X, a), \tilde{a}) \to (X, a)$, сопоставляющее кривой ее конец, является накрытием, обладающим требуемым свойством. Не будем останавливаться на проверке этого факта. Отметим лишь, что условия на пространство X необходимы для справедливости теоремы: если X несвязно, то отображение f не имеет прообразов над компонентами связности пространства X, не содержащими точку a; если X не является локально связным и локально односвязным, то отображение $f\colon (\Omega_G(X, a), \tilde{a}) \to (X, a)$ может не являться локальным гомеоморфизмом.

2. Покажем, что накрытие $f\colon (Y, b) \to (X, a)$, для которого группа $f_*\pi_1(Y, b) = G \subset \pi_1(X, a)$, левоэквивалентно накрытию, построенному по подгруппе G в первой части доказательства теоремы. Сопоставим точке $y \in Y$ любой элемент из пространства кривых $\Omega(Y, b, y)$ на Y, начинающихся в точке b, заканчивающихся в точке $y \in Y$ и определенных с точностью до гомотопии с закрепленными концами. Пусть $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ — две кривые из пространства $\Omega(Y, b, y)$ и $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1)^{-1} \circ \tilde{\gamma}_2$ — кривая, составленная из кривой $\tilde{\gamma}_2$ и из пройденной в обратном порядке кривой $\tilde{\gamma}_1$. Кривая $\tilde{\gamma}$ начинается и заканчивается в точке b, поэтому кривая $f \circ \tilde{\gamma}$ лежит в группе G. Следовательно, образ $f \circ \tilde{\gamma}$ произвольной кривой $\tilde{\gamma}$ из пространства $\Omega(Y, b, y)$ при проекции f является одной и той же точкой из пространства $\Omega_G(X, a)$ (т. е. кривой из пространства $\widehat{\Omega}(X, a)$, определенной с точностью до гомотопии с закрепленными концами и умножения справа на элементы группы G). Итак, мы сопоставили точке $y \in Y$ точку пространства $\Omega_G(X, a)$. Легко проверить, что это сопоставление задает левую эквивалентность накрытия $f\colon (Y, b) \to (X, b)$ со стандартным накрытием, соответствующим подгруппе $G = f_*\pi_1(Y, b)$. □

1.2. Накрытия с отмеченными точками и подгруппы фундаментальной группы. Теорема 1.3 показывает, что накрытия с отмеченной точкой над пространством X с отмеченной точкой a с точностью до левой эквивалентности классифицируются подгруппами

G в фундаментальной группе $\pi_1(X, a)$. Обсудим соответствие между накрытиями с отмеченными точками и подгруппами фундаментальной группы.

Пусть $f\colon (Y, b) \to (X, a)$ — накрытие, соответствующее подгруппе $G \subset \pi_1(X, a)$, и $F = f^{-1}(a)$ — слой, лежащий над точкой a. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.4. *Слой F находится во взаимно однозначном соответствии с правыми классами смежности группы $\pi_1(X, a)$ по подгруппе G. Если точке c слоя F соответствует правый класс смежности h, то накрытию $f\colon (Y, c) \to (X, a)$ с отмеченной точкой c соответствует группа hGh^{-1}.*

Доказательство. На пространстве $\Omega(X, a, a)$ замкнутых кривых, начинающихся в точке a и определенных с точностью до гомотопии с закрепленными концами, действует группа G при помощи умножения справа. Согласно описанию накрытия, соответствующего группе G (см. п. 1 доказательства теоремы 1.3), прообразы точки a для этого накрытия — орбиты действия группы G на пространстве $\Omega(X, a, a)$, т. е. правые классы смежности группы $\pi_1(X, a)$ по подгруппе G.

Пусть $h\colon [0, 1] \to X$ — кривая в пространстве X, начинающаяся в точке $h(0) = a$, и $\tilde{h}\colon [0, 1] \to Y$, $f\tilde{h} = h$, — поднятие этой кривой на Y, начинающееся в точке $\tilde{h}(0) = b$ и заканчивающееся в точке $\tilde{h}(1) = c$. Пусть $G_1 \subset \pi_1(X, a)$ — подгруппа, состоящая из кривых, поднятия которых на Y, начинающиеся в точке c, заканчиваются в той же точке c. Легко проверяются включения $hGh^{-1} \subseteq G_1$, $h^{-1}G_1h \subseteq G$, которые показывают, что $G_1 = hGh^{-1}$. □

Скажем, что накрытие $f_2\colon (Y_2, b_2) \to (X, a)$ *подчинено* накрытию $f_1\colon (Y_1, b_1) \to (X, a)$, если существует непрерывное отображение $h\colon (Y_1, b_1) \to (Y_2, b_2)$, согласованное с проекциями f_1, f_2, т. е. такое, что $f_1 = f_2 \circ h$.

Лемма 1.5. *Накрытие, соответствующее подгруппе G_2, подчинено накрытию, соответствующему подгруппе G_1, если и только если выполняется включение $G_2 \supseteq G_1$.*

Доказательство. Пусть $\pi_1(X, a) \supseteq G_2 \supseteq G_1$, и пусть $f_2\colon (Y_2, b_2) \to$ $\to (X, a)$ — накрытие, соответствующее подгруппе G_2 в $\pi_1(X, a)$. По лемме 1.2 группа G_2 совпадает с фундаментальной группой $\pi_1(Y_2, b_2)$ пространства Y_2. Пусть $g\colon (Y_1, b_1) \to (Y_2, b_2)$ — накрытие, соответствующее подгруппе G_1 в фундаментальной группе $\pi_1(Y_2, b_2) =$

$=G_2$. Отображение $f_1=f_2\circ g\colon (Y_1,b_1)\to(X,a)$ задает накрытие над (X,a), соответствующее подгруппе $G_1\subset\pi_1(X,a)$. Такое накрытие единственно с точностью до левой эквивалентности и накрытие f_2 подчинено ему, что доказывает лемму в одну сторону. В противоположную сторону она проверяется аналогично. $\square$

Рассмотрим накрытие $f\colon Y\to X$, для которого пространство Y связно, а X локально связно и локально односвязно. Пусть для некоторой точки $a\in X$ накрытие обладает следующим свойством: для любого выбора прообразов b и c точки a накрытия с отмеченными точками $f\colon (Y,b)\to(X,a)$ и $f\colon (Y,c)\to(X,a)$ эквивалентны. Тогда 1) накрытие обладает этим свойством для любой точки $a\in X$, 2) накрытие $f\colon Y\to X$ нормально. Обратно, если накрытие нормально, то для любой точки $a\in X$ оно обладает этим свойством. Это утверждение непосредственно вытекает из определения нормального накрытия.

Лемма 1.6. *Накрытие является нормальным, если и только если оно соответствует некоторому нормальному делителю H в фундаментальной группе $\pi_1(X,a)$. Для этого нормального накрытия группа гомеоморфизмов наложения изоморфна факторгруппе $\pi_1(X,a)/H$.*

Доказательство. Пусть накрытие $f\colon (Y,b)\to(X,a)$, соответствующее подгруппе $G\subset\pi_1(X,a)$, нормально. Тогда для любого прообраза c точки a это накрытие левоэквивалентно накрытию $f\colon (Y,c)\to(X,a)$. Согласно лемме 1.4 это означает, что группа G совпадает с любой своей сопряженной подгруппой. Следовательно, группа G является нормальным делителем в фундаментальной группе. Аналогично проверяется, что если G — нормальный делитель в фундаментальной группе, то соответствующее этой группе накрытие нормально.

Гомеоморфизм наложения, переводящий точку b в точку c, единствен. Действительно, множество, на котором совпадают два таких гомеоморфизма, во-первых, открыто (так как f — локальный гомоморфизм), во-вторых, замкнуто (так как гомоморфизмы непрерывны) и, в-третьих, непусто (так как содержит точку b). Так как пространство Y связно, это множество совпадает с Y.

Фундаментальная группа $\pi_1(X,a)$ действует правыми умножениями на пространстве $\Omega(X,a)$. Для всякого нормального делителя H это действие индуцирует действие на классах эквивалентности

$\Omega_H(X,a)$ (класс эквивалентности $\Omega(X,a)H$ при умножении на элемент $g\in\pi_1(X,a)$ переходит в класс эквивалентности $\Omega(X,a)Hg = \Omega(X,a)gH$). Действие фундаментальной группы на $\Omega_H(X,a)$ согласовано с проекцией $f\colon\Omega_H(X,a)\to(X,a)$, сопоставляющей каждой кривой ее конец. Поэтому группа $\pi_1(X,a)$ действует на пространстве Y нормального накрытия $f\colon(Y,b)\to(X,a)$ гомоморфизмами наложения. Для накрытия, соответствующего нормальному делителю H, ядром этого действия является группа H, т. е. на пространстве такого накрытия эффективно действует факторгруппа $\pi_1(X,a)/H$. Действием факторгруппы можно перевести точку b в любой прообраз c точки a. Поэтому не существует никаких других гомоморфизмов наложения $h\colon Y\to Y$, кроме гомоморфизмов действия факторгруппы $\pi_1(X,a)/H$. Лемма доказана. □

На слое $F=f^{-1}(a)$ накрытия $f\colon(Y,b)\to(X,a)$ действует фундаментальная группа $\pi_1(X,a)$. Определим это действие. Пусть γ — замкнутая кривая в пространстве X с началом и концом в точке a. Для каждой точки $c\in F$ обозначим через $\tilde\gamma_c$ поднятие кривой γ на Y, такое что $\tilde\gamma_c(0)=c$. Отображение $S_\gamma\colon F\to F$, переводящее точку c в точку $\tilde\gamma_c(1)\in F$, является элементом группы $S(F)$ взаимно однозначных отображений множества F в себя. Отображение S_γ зависит лишь от гомотопического класса кривой γ, т. е. от элемента фундаментальной группы $\pi_1(X,a)$, представленного кривой γ. Гомоморфизм $S_\gamma\colon\pi_1(X,a)\to S(F)$ называется *гомоморфизмом монодромии*, а образ фундаментальной группы в группе $S(F)$ называется *группой монодромии* накрытия $f\colon(Y,b)\to(X,a)$.

Пусть $f\colon(Y,b)\to(X,a)$ — накрытие, соответствующее подгруппе $G\subset\pi_1(X,a)$, $F=f^{-1}(a)$ — слой этого накрытия над точкой a и $S(F)$ — группа перестановок слоя F. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.7. *Группа монодромии накрытия является транзитивной подгруппой в группе S_F и равна фактору группы $\pi_1(X,a)$ по наименьшему нормальному делителю H, содержащему группу G, т. е.* $H=\bigcap\limits_{h\in\pi_1(X,a)} hGh^{-1}$.

Доказательство. Группа монодромии транзитивна. Для доказательства надо для всякой точки $c\in F$ предъявить кривую γ, такую что $S_\gamma(b)=c$. Возьмем произвольную кривую $\tilde\gamma$ на связном пространстве Y, соединяющую точку b с точкой c. В качестве кривой γ достаточно взять образ кривой $\tilde\gamma$ при проекции f.

Непосредственно из определений видно, что при действии фундаментальной группы на слое F стационарной группой точки $b \in F$ является группа $G \subset \pi_1(X, a)$. Пусть $h \in \pi_1(X, a)$ — элемент в фундаментальной группе, переводящий точку b в точку $c \in F$. Тогда стационарная группа точки c равна hGh^{-1}. Ядро гомоморфизма монодромии H является пересечением стационарных групп всех точек слоя, т. е. $H = \bigcap\limits_{h \in \pi_1(X,a)} hGh^{-1}$. Пересечение всех групп hGh^{-1} является наименьшим нормальным делителем, содержащим группу G. □

1.3. Другие классификации накрытий. В этом пункте мы обсуждаем обычную классификацию накрытий (не имеющих отмеченных точек). Затем мы классифицируем накрытия и накрытия с отмеченными точками, подчиненные заданному нормальному накрытию. В конце пункта приводится описание промежуточных накрытий, непосредственно связывающее такие накрытия с подгруппами группы наложения, действующей на нормальном накрытии.

Два накрытия $f_1 : Y_1 \to X$ и $f_2 : Y_2 \to X$ называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h : Y_1 \to Y_2$, коммутирующий с проекциями f_1 и f_2, т. е. такой, что $f_1 = f_2 \circ h$. Классифицируем накрытия со связным накрывающим пространством над связным, локально связным и локально односвязным пространством. Эта классификация сводится к аналогичной классификации для накрытий с отмеченными точками.

Лемма 1.8. *Накрытия с отмеченными точками эквивалентны как накрытия* (а не как накрытия с отмеченными точками!), *если и только если подгруппы, соответствующие этим накрытиям, сопряжены в фундаментальной группе многообразия X.*

Доказательство. Пусть $f_1 : (Y_1, b_1) \to (X, a)$ и $f_2 : (Y_2, b_2) \to (X, a)$ эквивалентны как накрытия. Гомеоморфизм h должен переводить слой $f_1^{-1}(a)$ в слой $f_2^{-1}(a)$. Поэтому накрытие $f_1 : (Y_1, b_1) \to (X, a)$ эквивалентно как накрытие с отмеченной точкой накрытию $f_2 : (Y_2, h(b_1)) \to (X, a)$, где $f_2(h(b_1)) = f_2(b_2)$. Это означает, что группы, соответствующие исходным накрытиям с отмеченными точками, сопряжены. □

Итак, *накрытия $f : Y \to X$*, где пространство Y связно, а X локально связно и односвязно, *классифицируются подгруппами фундаментальной группы $\pi_1(X)$, определенными с точностью до сопряжения* *в группе* $\pi_1(X)$ (группа $\pi_1(X)$, в отличие от группы $\pi_1(X, a)$, тоже определена с точностью до сопряжения).

При классификации накрытий и накрытий с отмеченными точками можно ограничиваться накрытиями, подчиненными данному нормальному накрытию. Определение соотношения подчиненности на накрытиях с отмеченными точками было дано выше. Можно определить аналогичное соотношение и для накрытий, по крайней мере, в случае, когда одно из накрытий нормально.

Скажем, что *накрытие* $f: Y \to X$ *подчинено нормальному накрытию* $g: M \to X$, если существует отображение $h: M \to Y$, коммутирующее с проекциями g и f, т. е. такое, что $g = f \circ h$. Ясно, что *накрытие подчинено нормальному накрытию, если и только если некоторая* (*или, что то же самое, любая*) *группа из класса сопряженных подгрупп в фундаментальной группе пространства* X *содержит нормальный делитель этой группы, соответствующий нормальному накрытию.*

Фиксируем в пространстве X отмеченную точку a. Пусть накрытие $g: (M, b) \to (X, a)$ соответствует нормальному делителю H группы $\pi_1(X, a)$ и $N = \pi_1(X, a)/H$ — группа наложения этого нормального накрытия. Рассмотрим всевозможные накрытия и накрытия с отмеченными точками, подчиненные этому нормальному накрытию. На такие накрытия переносятся все классификационные теоремы. При этом роль фундаментальной группы $\pi_1(X, a)$ играет группа наложения N нормального накрытия.

Сопоставим подчиненному накрытию с отмеченной точкой подгруппу группы наложения N, равную образу при гомоморфизме факторизации $\pi(X, a) \to N$ подгруппы фундаментальной группы, соответствующей накрытию с отмеченной точной. Для описанного соответствия справедлива следующая теорема.

Теорема 1.9. *Соответствие между накрытиями с отмеченными точками, подчиненными заданному нормальному накрытию, и подгруппами группы наложения этого нормального накрытия взаимно однозначно.*

Подчиненные накрытия с отмеченными точками эквивалентны как накрытия, если и только если соответствующие им подгруппы группы наложения сопряжены в группе наложения.

Подчиненное накрытие является нормальным, если и только если оно соответствует некоторому нормальному делителю M *груп-*

пы наложения N. Группа наложения подчиненного нормального накрытия изоморфна факторгруппе N/M.

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться уже доказанными «абсолютными» классификационными результатами и следующими свойствами факторизации групп.

Гомоморфизм факторизации устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми подгруппами исходной группы, содержащими ядро гомоморфизма, и всеми подгруппами факторгруппы. Это соответствие: 1) сохраняет частичный порядок по включению в множестве подгрупп, 2) переводит класс сопряженных подгрупп исходной группы в класс сопряженных подгрупп факторгруппы, 3) устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми нормальными делителями исходной группы, содержащими ядро гомоморфизма, и всеми нормальными делителями факторгруппы. При соответствии нормальных делителей из п. 3 фактор исходной группы по нормальному делителю и фактор ее факторгруппы по соответствующему нормальному делителю изоморфны. □

Пусть $f: M \to X$ — нормальное накрытие (как обычно, мы предполагаем, что M связно, а X локально связно и локально односвязно). *Промежуточным накрытием* между M и X назовем пространство Y вместе с отображением «на» $h_Y: M \to Y$ и проекцией $f_Y: Y \to X$, такими что $f = f_Y \circ h$.

Введем два различных понятия эквивалентности промежуточных накрытий. Скажем, что два промежуточных накрытия $M \xrightarrow{h_1} Y_1 \xrightarrow{f_1} X$ и $M \xrightarrow{h_2} Y_2 \xrightarrow{f_2} X$ *эквивалентны как поднакрытия накрытия* $f: M \to X$, если существует гомеоморфизм $h: Y_1 \to Y_2$, делающий диаграмму коммутативной, т. е. такой, что $h_2 = h \circ h_1$ и $f_1 = f_2 \circ h$. Скажем, что два поднакрытия *эквивалентны как накрытия над* X, если существует гомеоморфизм $h: Y_1 \to Y_2$, такой что $f_1 = f_2 \circ h$ (не требуется, чтобы гомеоморфизм h делал верхнюю часть диаграммы коммутативной).

Классификация промежуточных накрытий как поднакрытий эквивалентна классификации подчиненных накрытий с отмеченными точками. Действительно, если в пространстве M отметить какую-либо точку b, лежащую над точкой a, то в промежуточном накрывающем пространстве Y возникает инвариантно определенная отмеченная точка $h_Y(a)$.

Следующее утверждение является переформулировкой теоремы 1.9.

Утверждение 1.10. *Промежуточные накрытия для нормального накрытия с группой наложения N:*

1) *рассматриваемые как поднакрытия, классифицируются подгруппами группы N;*

2) *рассматриваемые как накрытия над X, классифицируются классами сопряженных подгрупп группы N.*

Подчиненное накрытие является нормальным, если и только если оно соответствует нормальному делителю M группы наложения N. Группа наложения подчиненного нормального накрытия изоморфна факторгруппе N/M.

Приведем еще одно описание всех промежуточных накрытий для нормального накрытия $f: M \to X$ с группой наложения N. Группа N является группой гомеоморфизмов пространства M, обладающей следующим свойством дискретности: около каждой точки пространства M существует окрестность, образы которой под действием различных элементов группы N не пересекаются. В качестве такой окрестности около точки $z \in M$ достаточно взять компоненту связности прообраза при проекции $f: M \to X$ связной и односвязной окрестности точки $f(z) \in X$.

Для каждой подгруппы G группы N рассмотрим факторпространство M_G пространства M по действию группы G. Точка в M_G — это орбита действия группы G на пространстве M. Топология в M_G индуцируется из топологии в пространстве M. Окрестность орбиты состоит из всех орбит, лежащих в инвариантном открытом множестве U пространства M, содержащем исходную орбиту и таком, что компонента связности множества U пересекает каждую орбиту не более чем по одной точке. Пространство M_N можно отождествить с пространством X, для этого надо отождествить точку $x \in X$ с прообразом $f^{-1}(x) \subset M$, являющимся орбитой действия группы преобразований наложения N на M. При таком отождествлении отображение факторизации $f_{e,N}: M \to M_N$ превращается в исходное накрытие $f: M \to X$.

Пусть G_1, G_2 — две подгруппы в N, и пусть выполнено включение $G_1 \subseteq G_2$. Тогда определено отображение $f_{G_1,G_2}: M_{G_1} \to M_{G_2}$, сопоставляющее орбите группы G_1 содержащую ее орбиту группы G_2. Легко видеть, что

1) отображение f_{G_1,G_2} является накрытием,

2) если $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3$, то $f_{G_1,G_3} = f_{G_2,G_3} \circ f_{G_1,G_2}$,

3) отображение $f_{G,N}: M_G \to M_N$ при отождествлении M_N с X переходит в накрытие, подчиненное исходному накрытию $f_{e,N}: M \to M_N$ (так как $f_{e,N} = f_{G,N} \circ f_{e,G}$),

4) если G — нормальный делитель в N, то накрытие $f_{G,N}: M_G \to M_N$ нормально и его группа наложения равна N/G.

С промежуточным накрытием $f_{G,N}: M_G \to M_N$ можно связать либо тройку пространств $M \xrightarrow{f_{e,G}} M_G \xrightarrow{f_{G,N}} M_N$ с отображениями $f_{e,G}$ и $f_{G,N}$, либо пару пространств $M_G \xrightarrow{f_{G,N}} M_N$ с отображением $f_{G,N}$. Эти две возможности соответствуют рассмотрению промежуточного накрытия как поднакрытия и как накрытия над M_N.

1.4. Аналогия между теорией Галуа и классификацией накрытий. В этом пункте обсуждается формальная аналогия между накрытиями и теорией Галуа.

В основной теореме теории Галуа рассматриваются алгебраические расширения основного поля, промежуточные между основным полем и его заданным расширением Галуа (а не все расширения основного поля одновременно).

В теории накрытий можно рассматривать накрытия базы, промежуточные между базой и ее заданным нормальным накрытием (а не все накрытия базы одновременно).

Классификации промежуточных накрытий как поднакрытий в теории Галуа соответствует классификация промежуточных полей как подполей расширения P. Чтобы это увидеть, нужно в утверждении 1.10 слова «нормальное накрытие», «группа наложения», «поднакрытие», заменить соответственно на слова «расширение Галуа», «группа Галуа», «промежуточное поле».

В § 2 мы рассмотрим конечнолистные разветвленные накрытия над связными одномерными комплексными многообразиями. Разветвленные накрытия (с отмеченными точками или без отмеченных точек) над многообразием X, ветвления которых лежат над заданным дискретным множеством O, классифицируются так же, как накрытия (с отмеченными точками или без отмеченных точек) над $X \setminus O$ (см. п. 2.2). Конечнолистные разветвленные накрытия соответствуют алгебраическим расширениям поля мероморфных функций на X, для которых основная теорема теории Галуа и классификация поднакрытий не просто формально аналогичны, но тесно связаны между собой.

Отметим, что классификация промежуточных накрытий как накрытий над базой тоже имеет формальную аналогию в теории Галуа. Она аналогична классификации алгебраических расширений основного поля, которое можно вложить в заданное расширение Галуа (в этой классификации не учитывается, как именно алгебраическое расширение вкладывается в заданное расширение Галуа).

§ 2. Пополнение разветвленных накрытий и римановы поверхности алгебраических функций

В этом параграфе рассматриваются конечнолистные разветвленные накрытия над одномерными комплексными многообразиями. Описывается операция пополнения накрытий над одномерным комплексным многообразием X, из которого удалено дискретное множество O. Она одинаково применима как к накрытиям, так и к накрытиям с отмеченными точками. В результате из конечнолистного накрытия над $X \setminus O$ получается разветвленное конечнолистное накрытие над X.

Локальный случай, в котором пополняются накрытия над открытым проколотым диском, рассматривается в п. 2.1. В локальном случае операция пополнения накрытий помогает доказать разложимость в ряды Пюизо многозначных функций, имеющих алгебраическую особенность.

В п. 2.2 рассматривается глобальный случай. Сначала определяется вещественная операция заклеивания дырок. Затем показывается, что полученное в результате применения вещественной операции заклеивания дырок разветвленное накрытие обладает естественной структурой комплексного многообразия.

В п. 2.3 классифицируются конечнолистные разветвленные накрытия с фиксированным множеством ветвления. Классификация почти дословно повторяет аналогичную классификацию неразветвленных накрытий. Поэтому мы ограничиваемся лишь формулировками результатов. Мы доказываем, что множество орбит действия конечной группы на аналитическом многообразии имеет естественную структуру аналитического многообразия.

В п. 2.4 мы применяем операцию пополнения накрытий для определения римановой поверхности неприводимого алгебраического уравнения над полем $K(X)$ мероморфных функций на многообразии X.

Параграф 2 опирается на результаты § 1.

2.1. Заклеивание дырки и ряды Пюизо. Пусть D_r — открытый диск радиуса r с центром в точке 0 на комплексной прямой и $D_r^* = D_r \setminus \{0\}$ — проколотый диск. Для каждого натурального k рассмотрим проколотый диск D_q^*, где $q = r^{1/k}$, вместе с отображением $f: D_q^* \to D_r^*$, заданным формулой $f(z) = z^k$.

Лемма 2.1. *Существует единственное связное k-листное накрытие $\pi: V^* \to D_r^*$ над проколотым диском D_r^*. Это накрытие нормально. Оно эквивалентно накрытию $f: D_q^* \to D_r^*$, где отображение f задано формулой $x = f(z) = z^k$.*

Доказательство. Фундаментальная группа области D_r^* изоморфна аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$. В группе $\mathbb{Z}$ только подгруппа $k\mathbb{Z}$ имеет индекс k. Подгруппа $k\mathbb{Z}$ — нормальный делитель в группе $\mathbb{Z}$. Накрытие $z \to z^k$ проколотого диска D_q^* над проколотым диском D_r^* нормально и соответствует подгруппе $k\mathbb{Z}$. □

Пусть $\pi: V^* \to D_r^*$ — связное k-листное накрытие над проколотым диском D_r^*. Обозначим через V множество, состоящее из области V^*, к которой добавлена точка A. Доопределим отображение π до отображения множества V на диск D_r, полагая $\pi(A) = 0$. Введем на множестве V минимальную топологию, в которой 1) отождествление множества $V \setminus A$ с областью V^* является гомеоморфизмом; 2) отображение $\pi: V \to D_r$ непрерывно.

Лемма 2.2. *Отображение $\pi: V \to D_r$ левоэквивалентно отображению $f: D_q \to D_r$, определенному формулой $x = f(z) = z^k$. В частности, V гомеоморфно открытому диску D_q.*

Доказательство. Пусть $h: D_r^* \to V^*$ — гомеоморфизм, устанавливающий эквивалентность накрытия $\pi: V^* \to D_r^*$ и стандартного накрытия $f: D_q^* \to D_r^*$. Доопределим h до отображения диска D_q в множество V, полагая $h(0) = A$. Нам надо проверить, что доопределенное отображение h является гомеоморфизмом. Проверим, например, что h — непрерывное отображение. По определению топологии на V во всякой окрестности точки A есть окрестность V_0 вида $V_0 = \pi^{-1}(U_0)$, где U_0 — окрестность точки 0 на комплексной прямой. Пусть $W_0 \subset D_q$ — открытое множество, определенное формулой $W_0 = f^{-1}U_0$. Имеем $h^{-1}V_0 = W_0$, что доказывает непрерывность отображения h в точке 0. Непрерывность отображения h^{-1} доказывается аналогично. □

Воспользуемся обозначениями из предыдущей леммы.

Лемма 2.3. *На многообразии V существует единственная структура аналитического многообразия, для которого отображение $\pi: V \to D_r$ аналитично. Эта структура индуцируется из аналитической структуры на диске D_q при помощи гомеоморфизма $h: D_q \to \to V$.*

Доказательство. Гомеоморфизм h переводит отображение π в аналитическое отображение $f(z) = z^k$. Таким образом, аналитическая структура на V, индуцированная при помощи гомеоморфизма h, удовлетворяет условию леммы. Рассмотрим какую-либо другую аналитическую структуру на V. Отображение $h: D \to V$ вне точки 0 локально представимо в виде $h(z) = \pi^{-1}z^k$ и, следовательно, аналитично. Итак, отображение $h: D \to V$ непрерывно и аналитично всюду, кроме, может быть, точки 0. По теореме об устранимой особенности оно аналитично и в точке 0, и, следовательно, аналитическая структура на V, в которой проекция π аналитична, единственна. □

Переход от вещественного многообразия V^* к вещественному многообразию V и переход от накрытия $\pi: V^* \to D_r^*$ к отображению $\pi: V \to D_r$ будем называть *вещественной операцией заклеивания дырки*. Лемма 2.3 показывает, что при заклеивании дырки на многообразии V существует единственная структура комплексного аналитического многообразия, для которого отображение $\pi: V \to D_r$ аналитично. Переход от комплексного многообразия V^* к комплексному многообразию V и переход от аналитического накрытия $\pi: V^* \to D_r^*$ к аналитическому отображению $\pi: V \to D_r$ будем называть *операцией заклеивания дырки*. Именно эта операция нам нужна для дальнейшего.

Операция заклеивания дырки тесно связана с определением алгебраической особой точки и с рядами Пюизо. Остановимся на этом подробнее.

Скажем, что аналитический росток φ_a в точке $a \in D_r$ определяет многозначную функцию в диске D_r *с алгебраической особенностью* в точке 0, если 1) росток φ_a продолжается вдоль кривой, начинающейся в точке a и лежащей в проколотом диске D_r^*; 2) многозначная функция φ в проколотом диске D_r^*, полученная продолжением ростка φ_a по кривым, лежащим в D_r^*, имеет конечное число k значений; 3) при приближении к точке 0 многозначная функция φ_a растет не быстрее чем степенным образом, т. е. существуют положительные числа C, N, такие что любое из значений многозначной функции φ удовлетворяет неравенству $|\varphi(x)| < C|x|^{-N}$.

Лемма 2.4. *Многозначная функция φ, имеющая алгебраическую особенность в проколотом диске D_r^*, представима в этом диске рядом Пюизо*

$$\varphi(x) = \sum_{m > -m_0} c_m x^{m/k}.$$

Доказательство. Если функция φ аналитически продолжается по всем путям, лежащим в проколотом диске D_r^*, и имеет k различных значений, то росток $g_b = \varphi_a \circ z_b^k$, где $b^k = a$, задает однозначную функцию в проколотом диске D_q^*, где $q = r^{1/k}$. По условию функция g растет не быстрее чем степенным образом при подходе к точке 0, поэтому в проколотом диске D_q^* она представима рядом Лорана $g(z) = \sum\limits_{m > -m_0} c_m z^m$. Подставляя в ряд для функции g вместо z функцию $x^{1/k}$, получим ряд Пюизо для функции φ. □

2.2. Отображения аналитического типа и вещественная операция заклеивания дырок. В этом пункте определяется вещественная операция заклеивания дырок. Показывается, что полученное в результате применения вещественной операции заклеивания дырок разветвленное накрытие имеет естественную аналитическую структуру.

Пусть X — одномерное комплексное аналитическое многообразие, M — двумерное вещественное многообразие и $\pi: M \to X$ — непрерывное отображение. Скажем, что отображение π в точке $y \in M$ имеет *особенность аналитического типа кратности* $k > 0$, если существуют 1) связная проколотая окрестность $U^* \subset X$ точки $x = \pi(y)$, 2) компонента связности области $\pi^{-1}(U^*)$, являющаяся проколотой окрестностью $V^* \subset M$ точки y, такие что тройка $\pi: V^* \to U^*$ является k-листным накрытием. Особой точке y естественно приписать *кратность* k как прообразу точки x: посчитанное с учетом кратностей число прообразов отображения π в окрестности особой точки аналитического типа кратности k постоянно и равно k.

Отображение $f\colon M \to X$ называется *отображением аналитического типа*, если в каждой точке оно имеет особенность аналитического типа. Очевидно, что комплексно-аналитическое отображение $f\colon M \to X$ комплексного многообразия M в комплексное многообразие X является отображением аналитического типа (если его рассматривать как непрерывное отображение вещественного многообразия M в комплексное многообразие X). Для отображения аналитического типа точка y называется *регулярной*, если ее кратность равна единице, и *особой*, если ее кратность больше единицы. Множество регулярных точек отображения аналитического типа открыто. Отображение около регулярной точки является локальным гомеоморфизмом. Множество O_M особых точек отображения аналитического типа является дискретным подмножеством в M.

Утверждение 2.5. *Пусть M — двумерное многообразие и $f\colon M \to X$ — его отображение аналитического типа в одномерное аналитическое многообразие X. Тогда в M существует единственная структура аналитического многообразия, для которой отображение f аналитично.*

Доказательство. В точках открытого множества $M \setminus O_M$ отображение f является локальным гомеоморфизмом. Этот локальный гомеоморфизм с аналитическим многообразием X превращает $M \setminus O_M$ в аналитическое многообразие. Около точек множества O_M аналитическую структуру можно ввести так же, как в приклеенных точках при операции заклеивания дырки. Докажем, что других аналитических структур, для которых f аналитично, нет. Пусть M_1 и M_2 — две копии многообразия M с разными аналитическими структурами. Пусть O_1 и O_2 — выделенные дискретные подмножества в копиях M_1 и M_2 и $h\colon M_1 \to M_2$ — гомеоморфизм отождествления этих копий. Из условия видно, что гомеоморфизм h является аналитическим отображением всюду, кроме дискретного множества $O_1 \subset M_1$. По теореме об устранимых особенностях h — биголоморфное отображение. Значит, две аналитические структуры на M совпадают. □

Вернемся к операции заклеивания дырок. Пусть M — вещественное двумерное многообразие и $f\colon M \to X$ — отображение аналитического типа многообразия M в комплексное многообразие X.

Около точки $a \in X$ фиксируем локальную координату u, $u(a) = 0$, задающую обратимое отображение малой окрестности точки $a \in X$ в малую окрестность нуля на комплексной прямой. Пусть U^* — прообраз малого проколотого диска D_r^* с центром в точке 0 при отображении u. Пусть среди компонент связности прообраза $\pi^{-1}(U^*)$ есть компонента V^*, ограничение отображения π на которую является k-листным накрытием, где k — положительное число. В этом случае применима *вещественная операция заклеивания дырки*. Она состоит в следующем. Из многообразия M вырезается окрестность V^*. Накрытие $\pi\colon V^* \to U^*$ заменяется на отображение $\pi\colon V \to U$ при помощи описанной выше вещественной операции заклеивания дырки. Многообразие V^* лежит в многообразии V и отличается от V одной точкой. Вещественная операция заклеивания дырки состоит в приклеивании к многообразию M вместо вырезанной окрестности V^* окрестности V вместе с определенным на ней отображением $\pi\colon V \to X$.

Вещественная операция заклеивания дырок заключается в применении вещественной операции заклеивания дырки сразу ко всем дыркам одновременно. Она определена корректно: если V^* — компонента связности прообраза $\pi^{-1}(U^*)$ проколотой окрестности U^* точки $o \in X$ и отображение $\pi\colon V^* \to U^*$ — конечнолистное накрытие, то операция заклеивания всех дырок добавляет к замыканию области V^* ровно одну точку, лежащую над точкой o. Топология около этой новой точки определяется так же, как и при операции заклеивания одной дырки.

Операция заклеивания дырок — это комплексификация вещественной операции заклеивания дырок. Операция заклеивания дырок применима к комплексному аналитическому многообразию M, снабженному аналитическим отображением $f\colon M \to X$. Для этого тройку $f\colon M \to X$ надо рассматривать как отображение аналитического типа из вещественного многообразия M в X. К полученной тройке надо применить вещественную операцию заклеивания дырок. В результате получается вещественное многообразие $\widetilde{M}$ вместе с отображением аналитического типа $\pi\colon \widetilde{M} \to X$. Многообразие $\widetilde{M}$ имеет единственную структуру комплексного многообразия, в которой отображение аналитического типа π является аналитическим. Именно это комплексное многообразие $\widetilde{M}$ вместе с аналитическим отображением π является результатом применения операции заклеивания дырок к исходной тройке $f\colon M \to X$. В дальнейшем нам будет нужна именно операция заклеивания дырок, а не ее вещественный вариант.

Пусть X и M — одномерные комплексные многообразия, O — дискретное подмножество в X и $\pi\colon M \to U$, где $U = X \setminus O$, — аналитическое отображение, являющееся конечнолистным накрытием. Пусть многообразие X связно (накрывающее многообразие M может быть несвязным).

Около любой точки $o \in O$ можно взять малую проколотую окрестность U^*, не содержащую других точек множества O. Над проколотой окрестностью U^* возникает накрытие $f\colon V^* \to U^*$, где $V^* = f^{-1}(U^*)$. Многообразие V^* разбивается на компоненты связности V_i^*. Применим операцию заклеивания дырок. Над точкой $o \in O$ приклеится конечное число точек, равное числу компонент связности многообразия V^*.

Лемма 2.6. *В результате применения операции заклеивания дырок к k-листному накрытию $\pi\colon M \to U$, где $U = X \setminus O$, получается комплексное многообразие $\widetilde{M}$, снабженное собственным аналитическим отображением $\tilde{\pi}\colon \widetilde{M} \to X$ степени k.*

Доказательство. Нужно проверить собственность отображения $\tilde{\pi}$. Прежде всего, это отображение аналитическое, поэтому образ каждого открытого множества при этом отображении открыт. Далее, число прообразов любой точки $x_0 \in X$ при отображении $\tilde{\pi}$, посчитанное с учетом кратностей, равно k. Поэтому отображение $\tilde{\pi}$ собственно. □

2.3. Конечнолистные разветвленные накрытия с фиксированным множеством ветвления. В этом пункте классифицируются конечнолистные разветвленные накрытия с фиксированным множеством ветвления.

Пусть X — связное комплексное многообразие с выделенным дискретным подмножеством O и отмеченной точкой $a \notin O$. Тройку, состоящую из комплексных многообразий M и X и собственного аналитического отображения $\pi\colon (M, b) \to (X, a)$, все критические значения которого содержатся в множестве O, будем называть *разветвленным накрытием над X с ветвлением, лежащим над O*. Мы рассматриваем разветвленные накрытия с точностью до левой эквивалентности. Другими словами, две тройки $\pi_1\colon M_1 \to X$ и $\pi_2\colon M_2 \to X$ считаются одинаковыми, если существует гомеоморфизм $h\colon M_1 \to M_2$, согласованный с проекциями π_1 и π_2, т. е. $\pi_1 = h \circ \pi_2$. *Гомеоморфизм h, устанавливающий эквивалентность разветвленных* *накрытий, автоматически является аналитическим отображением из многообразия M_1 в многообразие M_2*. Это доказывается так же, как утверждение 2.5.

Проколом ветвлений назовем операцию, сопоставляющую связному, разветвленному над O накрытию $\pi\colon M \to X$ неразветвленное накрытие $\pi\colon M \setminus \widetilde{O} \to X \setminus O$ над $X \setminus O$, где $\widetilde{O}$ — прообраз множества O при отображении π. Непосредственно из определений вытекает следующая лемма.

Лемма 2.7. *Операция прокола ветвлений и операция заклейки дырок взаимно обратны друг другу. Они устанавливают изоморфизм категории разветвленных накрытий над X с ветвлением, лежащим над множеством O, и категории конечнолистных накрытий над $X \setminus O$.*

Все определения и утверждения о накрытиях автоматически переносятся на разветвленные накрытия: достаточно применять лишь аргументы, использованные при доказательстве утверждения 2.5. Поэтому мы ограничимся формулировками определений и утверждений о разветвленных накрытиях.

Начнем с определений, относящихся к разветвленным накрытиям.

Разветвленные накрытия $f_1\colon M_1 \to X$, $f_2\colon M_2 \to X$ с ветвлением, лежащим над O, называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h\colon M_1 \to M_2$, такой что $f_1 = f_2 \circ h$. (При этом гомеоморфизм h автоматически является аналитическим.)

Преобразованием наложения разветвленного накрытия $\pi\colon M \to X$ с ветвлением, лежащим над O, называется гомеоморфизм пространства M в себя, коммутирующий с отображением проекции π. (Преобразование наложения автоматически является аналитическим.)

Разветвленное накрытие $\pi\colon M \to X$ со связным многообразием M и с ветвлением, лежащим над O, называется *нормальным*, если группа его преобразований наложения транзитивно действует на слоях отображения π. Группа преобразований наложения автоматически является группой аналитических преобразований пространства M.

Разветвленное накрытие $f_2\colon M_2 \to X$ с ветвлением, лежащим над O, называется *подчиненным* нормальному разветвленному накрытию $f_1\colon M_1 \to X$ с ветвлением, лежащим над O, если существует разветвленное накрытие $h\colon M_1 \to M_2$ с ветвлением, лежащим над

$f_2^{-1}(O)$, такое что $f_1 = f_2 \circ h$. (При этом отображение h автоматически оказывается аналитическим.)

Перейдем к определениям, относящимся к накрытиям с отмеченными точками.

Тройка $\pi\colon (M, b) \to (X, a)$, в которой $\pi\colon M \to X$ — разветвленное накрытие с ветвлением, лежащим над O, и $a \in X$, $b \in M$ — отмеченные точки, такие что $a \notin O$ и $\pi(b) = a$, называется *разветвленным накрытием с отмеченными точками с ветвлением, лежащим над* O.

Разветвленное накрытие $f_2\colon (M_2, b_2) \to (X, a)$ с ветвлением, лежащим над O, называется *подчиненным* разветвленному накрытию $f_1\colon (M_1, b_1) \to (X, a)$ с ветвлением, лежащим над O, если существует разветвленное накрытие $h\colon (M_1, b_1) \to (M_2, b_2)$ с ветвлением, лежащим над $f_2^{-1}(O)$, такое что $f_1 = f_2 \circ h$. (При этом отображение h автоматически оказывается аналитическим.) В частности, такие накрытия называются *эквивалентными*, если отображение h — гомеоморфизм. (Гомеоморфизм h автоматически является бианалитическим соответствием между M_1 и M_2.)

Операция прокола ветвлений сопоставляет разветвленному накрытию $f\colon (Y, b) \to (X, a)$ с отмеченными точками и разветвленному накрытию $\pi\colon M \to X$ с ветвлениями, лежащими над O, накрытие с отмеченными точками $f\colon (Y \setminus f^{-1}(O), b) \to (X \setminus O, a)$ и накрытие $\pi\colon M \setminus \pi^{-1}(O) \to X \setminus O$. С этими накрытиями над $X \setminus O$ связаны подгруппа конечного индекса в группе $\pi_1(X \setminus O, a)$ и, соответственно, класс сопряженных подгрупп конечного индекса в этой группе. Будем говорить, что эта группа соответствует разветвленному накрытию $f\colon (Y, b) \to (X, a)$ с отмеченными точками и что этот класс сопряженных подгрупп соответствует разветвленному накрытию $\pi\colon M \to X$.

Рассмотрим всевозможные разветвленные накрытия над многообразием X с отмеченной точкой a со связным накрывающим многообразием, имеющие ветвление, лежащее над множеством O, $a \notin O$. Перенося доказанные утверждения о накрытиях с отмеченной точкой на разветвленные накрытия, получим, что

1) *такие накрытия классифицируются подгруппами конечного индекса в группе* $\pi_1(X \setminus O, a)$;

2) *такое накрытие, соответствующее подгруппе* G_2, *подчинено такому накрытию, соответствующему подгруппе* G_1, *если и только если выполняется включение* $G_2 \supseteq G_1$;

3) *такое накрытие нормально, если и только если соответствующая ему подгруппа фундаментальной группы* $\pi_1(X \setminus O, a)$ *является ее нормальным делителем* H. *Группа наложения нормального разветвленного накрытия изоморфна группе* $\pi_1(X \setminus O, a)/H$.

Рассмотрим всевозможные разветвленные накрытия над многообразием X со связным накрывающим многообразием, имеющие ветвление, лежащее над множеством O, $a \notin O$. Перенося доказанное утверждение о накрытиях на разветвленные накрытия, получим, что

4) *такие разветвленные накрытия классифицируются классами сопряженности подгрупп конечного индекса в группе* $\pi_1(X \setminus O, a)$.

На разветвленные накрытия дословно переносится описание разветвленных накрытий, подчиненных данному нормальному разветвленному накрытию с группой наложения N. Сопоставим подчиненному разветвленному накрытию с отмеченной точкой подгруппу группы наложения N, равную образу при гомоморфизме факторизации $\pi(X, a) \to N$ подгруппы фундаментальной группы, соответствующей разветвленному накрытию. Для описанного соответствия справедлива следующая теорема.

Теорема 2.8. *Соответствие между разветвленными накрытиями с отмеченными точками, подчиненными заданному нормальному накрытию, и подгруппами группы наложения этого нормального накрытия взаимно однозначно.*

Подчиненные разветвленные накрытия с отмеченными точками эквивалентны как разветвленные накрытия, если и только если соответствующие им подгруппы группы наложения сопряжены в группе наложения.

Подчиненное разветвленное накрытие является нормальным, если и только если оно соответствует некоторому нормальному делителю M *группы наложения* N. *Группа наложения подчиненного нормального накрытия изоморфна факторгруппе* N/M.

На разветвленные накрытия переносится понятие поднакрытия.

Пусть $f: M \to X$ — нормальное разветвленное накрытие (мы предполагаем, как обычно, что комплексное многообразие M связно). *Промежуточным разветвленным накрытием* между M и X называется комплексное многообразие Y вместе с отображением «на» $h_Y: M \to Y$ и проекцией $f_Y: Y \to X$, такими что $f = f_Y \circ h_Y$.

Скажем, что два промежуточных разветвленных накрытия $M \xrightarrow{h_1} Y_1 \xrightarrow{f_1} X$ и $M \xrightarrow{h_2} Y_2 \xrightarrow{f_2} X$ *эквивалентны как разветвленные поднакрытия накрытия* $f: M \to X$, если существует аналитическое отображение $h: Y_1 \to Y_2$, делающее диаграмму коммутативной, т. е. такое, что $h_2 = h \circ h_1$ и $f_1 = f_2 \circ h$. Скажем, что два разветвленных поднакрытия *эквивалентны как разветвленные накрытия над* X, если существует аналитическое отображение $h: Y_1 \to Y_2$, такое что $f_1 = f_2 \circ h$ (не требуется, чтобы отображение h делало верхнюю часть диаграммы коммутативной).

Классификация промежуточных разветвленных накрытий как разветвленных поднакрытий эквивалентна классификации подчиненных накрытий с отмеченными точками.

Действительно, если в многообразии M отметить какую-либо точку b, лежащую над точкой a, то в промежуточном накрывающем многообразии Y возникает инвариантно определенная отмеченная точка $h_Y(a)$.

Переформулируем утверждение 1.10.

Утверждение 2.9. *Промежуточные разветвленные накрытия для нормального разветвленного накрытия с группой наложения* N:

1) *рассматриваемые как разветвленные поднакрытия, классифицируются подгруппами группы* N;

2) *рассматриваемые как разветвленные накрытия над* X, *классифицируются классами сопряженных подгрупп группы* N.

Подчиненное разветвленное накрытие является нормальным, если и только если оно соответствует нормальному делителю H *группы наложения* N.

Группа наложения подчиненного разветвленного нормального накрытия изоморфна факторгруппе N/H.

Приведем еще одно описание всех разветвленных накрытий, подчиненных заданному нормальному разветвленному накрытию. Пусть $\pi: M \to X$ — нормальное конечнолистное разветвленное накрытие, группа преобразований наложения которого равна N.

Группа преобразований наложения N является группой аналитических преобразований многообразия M, коммутирующих с проекцией π. Она индуцирует транзитивную группу преобразований слоя отображения π. Преобразования из группы N могут иметь изолированные неподвижные точки, лежащие над множеством критических точек отображения π.

Лемма 2.10. *Множество M_N орбит действия группы наложения N на разветвленном нормальном накрытии M находится во взаимно однозначном соответствии с многообразием X.*

Доказательство. На слое отображения $\pi\colon M\to X$ над каждой точкой $x_0\notin O$ преобразования наложения действуют, по определению, транзитивно. Пусть $o\in O$ — точка в множестве ветвления. Пусть U^* — малый проколотый координатный диск вокруг точки o, не содержащий точек множества O. Прообраз $\pi^{-1}(U^*)$ области U^* разбивается на компоненты связности V_i^*, являющиеся проколотыми окрестностями прообразов b_i точки o. Группа преобразований наложения транзитивно действует на областях V_i^*. Действительно, каждая из этих областей пересекается со слоем $\pi^{-1}(c)$, где c — любая точка из области U^*, а группа N транзитивно действует на слое $\pi^{-1}(c)$. Из транзитивности действия N на компонентах V_i^* вытекает транзитивность действия N на слое $\pi^{-1}(o)$. □

Теорема 2.11. *Множество орбит M/G аналитического многообразия под действием конечной группы G аналитических преобразований имеет структуру аналитического многообразия.*

Доказательство. 1. Стационарная группа G_{x_0} любой точки $x_0\in$ $\in M$ при действии группы G циклическая. Действительно, рассмотрим гомоморфизм группы G_{x_0} в группу линейных преобразований одномерного векторного пространства, сопоставляющий преобразованию его дифференциал в точке x_0. Это отображение не может иметь ядра: если начальные члены ряда Тейлора преобразования f есть $f(x_0+h)=x_0+h+ch^k+\ldots$, то начальные члены ряда Тейлора l-й итерации $f^{[l]}$ преобразования f есть $f^{[l]}=x_0+h+lch^k+\ldots$ Поэтому никакая итерация преобразования f не будет тождественным преобразованием, что противоречит конечности группы G_{x_0}. Конечная группа линейных преобразований пространства $\mathbb{C}^1$ — циклическая группа, порожденная умножением на один из первообразных корней из единицы ξ_m степени m, где m — порядок группы G_{x_0}.

2. Стационарную группу G_{x_0} точки x_0 можно линеаризовать, т. е. можно ввести локальную координату u около точки x_0, такую что преобразования группы G_{x_0}, записанные в этой системе координат, линейны. Пусть f — образующая группы G_{x_0}. Тогда выполняется равенство $f^{[m]}\equiv \mathrm{Id}$, где Id — тождественное преобразование. Дифференциал функции f в точке x_0 — это умножение на ξ_m, где ξ_m — один из первообразных корней из единицы степени m. Рассмот-

рим любую функцию φ, дифференциал которой не равен нулю в точке x_0. С отображением f связан линейный оператор f^* на пространстве функций. Напишем резольвенту Лагранжа $R_{\xi_m}(\varphi)$ функции φ для действия оператора f^*: $R_{\xi_m}(\varphi) = \frac{1}{m}\sum \xi_m^{-k}(f^*)^k(\varphi)$. Функция $u = R_{\xi_m}(\varphi)$ является собственным вектором преобразования f^* с собственным числом ξ_m. Дифференциалы в точке x_0 у функций u и φ совпадают (это проверяется простым вычислением). Отображение f в координате u становится линейным, так как $f^*u = \xi_m u$.

3. Теперь просто ввести аналитическую структуру в пространстве орбит. Рассмотрим какую-либо орбиту. Пусть стационарные группы точек орбиты тривиальны. Тогда малая окрестность точки орбиты каждую орбиту пересекает не более чем один раз. Локальная координата около этой точки параметризует соседние орбиты. Если у точки орбиты есть нетривиальная стационарная группа, то около точки можно выбрать локальную координату u так, чтобы в этой системе координат стационарная группа действовала линейно, умножая u на степени корня ξ_m. Соседние орбиты параметризуются функцией $t = u^m$. Теорема доказана. □

С каждой подгруппой G группы N свяжем аналитическое многообразие M_G, являющееся пространством орбит действия группы G. Отождествим пространство M_N с пространством X. При этом отождествлении отображение факторизации $f_{e,N}: M \to M_N$ превращается в исходное разветвленное накрытие $f: M \to X$.

Пусть G_1, G_2 — две подгруппы в N, и пусть выполнено включение $G_1 \subseteq G_2$. Тогда определено отображение $f_{G_1,G_2}: M_{G_1} \to M_{G_2}$, сопоставляющее орбите группы G_1 содержащую ее орбиту группы G_2. Легко видеть, что

1) отображение f_{G_1,G_2} является разветвленным накрытием;

2) если $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3$, то $f_{G_1,G_3} = f_{G_2,G_3} \circ f_{G_1,G_2}$;

3) отображение $f_{G,N}: M_G \to M_N$ при отождествлении M_N с X переходит в разветвленное накрытие, подчиненное исходному разветвленному накрытию $f_{e,N}: M \to M_N$ (так как $f_{e,N} = f_{G,N} \circ f_{e,G}$);

4) если G — нормальный делитель в N, то разветвленное накрытие $f_{G,N}: M_G \to M_N$ нормально и его группа наложения равна N/G.

С промежуточным разветвленным накрытием $f_{G,N}: M_G \to M_N$ можно связать либо тройку пространств $M \xrightarrow{f_{e,G}} M_G \xrightarrow{f_{G,N}} M_N$ с отображениями $f_{e,G}$ и $f_{G,N}$, либо пару пространств $M_G \xrightarrow{f_{G,N}} M_N$ с отображением $f_{G,N}$. Эти две возможности соответствуют рассмотрению промежуточного накрытия как разветвленного поднакрытия и как разветвленного накрытия над M_N.

2.4. Риманова поверхность алгебраического уравнения над полем мероморфных функций. Наша цель — геометрическое описание алгебраических расширений поля $K(X)$ мероморфных функций на связном одномерном комплексном многообразии X. В этом пункте мы построим риманову поверхность алгебраического уравнения над полем $K(X)$.

Пусть $T = y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n$ — полином от переменной y над полем $K(X)$ мероморфных функций на X. Мы будем предполагать, что при разложении полинома T на неприводимые множители каждый множитель встречается с единичной кратностью. В этом случае дискриминант D полинома T является ненулевым элементом поля $K(X)$. Обозначим через O дискретное подмножество в X, содержащее все полюсы коэффициентов a_i и все нули дискриминанта D. Для всякой точки $x_0 \in X \setminus O$ полином $T_{x_0} = y^n + a_1(x_0)y^{n-1} + \ldots + a_n(x_0)$ имеет в точности n различных корней. *Римановой поверхностью* уравнения $T = 0$ называются n-листное разветвленное накрытие $\pi\colon M \to X$ и мероморфная функция $y\colon M \to \mathbb{C}P^1$, такие что для каждой точки $x_0 \in X \setminus O$ множество корней полинома $T_{x_0} = 0$ совпадает с множеством значений функции y на прообразе $\pi^{-1}(x_0)$ точки x_0 при проекции π. Покажем, что риманова поверхность уравнения существует и единственна (с точностью до аналитического гомеоморфизма, коммутирующего с проекциями в X и функциями y).

В декартовом произведении $(X \setminus O) \times \mathbb{C}^1$ определены проекция π на первый сомножитель и функция y, являющаяся проекцией на второй сомножитель. Рассмотрим в декартовом произведении гиперповерхность M_O, заданную уравнением $T(\pi(a), y(a)) = 0$. Частная производная T по y в любой точке гиперповерхности M_O не равна нулю, так как полином $T_{\pi(a)}$ имеет некратные корни. По теореме о неявной функции гиперповерхность M_O неособа и ее проекция на $X \setminus O$ является локальным гомеоморфизмом. На многообразии M_O определены проекция $\pi\colon M_O \to X \setminus O$ и функция $y\colon M_O \to \mathbb{C}^1$. Применяя к накрытию $\pi\colon M_O \to X \setminus O$ операцию заклеивания дырок, получим n-листное разветвленное накрытие $\pi\colon M \to X$.

Теорема 2.12. *Функция* $y\colon M_O \to \mathbb{C}^1$ *продолжается до мероморфной функции* $y\colon M \to \mathbb{C}P^1$. *Разветвленное накрытие* $\pi\colon M \to X$, *снабженное мероморфной функцией* $y\colon M \to \mathbb{C}P^1$, *является римановой поверхностью уравнения* $T=0$. *Других римановых поверхностей у уравнения* $T=0$ *нет.*

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.13 (из школьной математики). *Всякий корень* y_0 *уравнения* $y^n + a_1y^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ *удовлетворяет неравенству* $|y_0| < \max\bigl(1, \sum|a_i|\bigr)$.

Доказательство. Если $|y_0|>1$ и $y_0=-a_1-\ldots-a_ny_0^{1-n}$, то $|y_0|< < \max\bigl(1, \sum|a_i|\bigr)$. □

Переходим к доказательству теоремы. Функции π^*a_i мероморфны на M. В проколотой окрестности каждой точки функция y удовлетворяет неравенству $|y| < \max\bigl(1, \sum|\pi^*a_i|\bigr)$ и, следовательно, имеет в каждой приклеенной точке либо полюс, либо устранимую особенность.

По построению тройка $\pi\colon M_O \to X \setminus O$ является n-листным накрытием и для каждого $x_0 \in X \setminus O$ множество корней полинома T_{x_0} совпадает с образом множества $\pi^{-1}(x_0)$ при отображении $y\colon M_O \to \mathbb{C}P^1$. Поэтому разветвленное накрытие $\pi\colon M \to X$, снабженное мероморфной функцией $y\colon M \to \mathbb{C}P^1$, является римановой поверхностью уравнения $T=0$.

Пусть разветвленное накрытие $\pi_1\colon M_1 \to X$ и функция $y_1\colon M_1 \to \to \mathbb{C}P^1$ представляют собой другую риманову поверхность этого уравнения. Обозначим через O_1 множество $\pi_1^{-1}O$. Существует естественное взаимно однозначное отображение $h_1\colon M_O \to M_1 \setminus O_1$, коммутирующее с проекциями $\pi_1 \circ h_1 = \pi$, $y_1 \circ h_1 = y$. Действительно, по определению римановой поверхности множества чисел $\{y \circ \pi^{-1}(x)\}$ и $\{y_1 \circ \pi_1^{-1}(x)\}$ совпадают с множеством корней полинома $T_{\pi(x)}$. Легко видеть, что отображение h_1 непрерывно и что оно продолжается по непрерывности до аналитического гомеоморфизма $h\colon M \to M_1$, коммутирующего с проекциями $\pi_1 \circ h = \pi$, $y_1 \circ h = y$. □

Замечание. Иногда одно многообразие M, фигурирующее в определении римановой поверхности уравнения, называют римановой поверхностью уравнения. Это же многообразие называют *римановой поверхностью* функции y, удовлетворяющей уравнению. Когда это не приводит к недоразумению, мы будем пользоваться этой многозначной терминологией.

Множество $\widetilde{O}$ критических значений разветвленного накрытия $\pi: M \to X$, связанного с римановой поверхностью уравнения $T=0$, может оказаться строго меньше, чем множество O, фигурирующее в его построении (включение $\widetilde{O} \subseteq O$ выполняется всегда). Множество $\widetilde{O}$ называется *множеством ветвления* уравнения $T=0$. Над точкой $a \in X \setminus \widetilde{O}$ уравнение $T_a = 0$ может иметь кратные корни, однако в поле ростков мероморфных функций в точке $a \in X \setminus \widetilde{O}$ уравнение $T=0$ имеет лишь некратные корни и их число равно степени уравнения $T=0$. *Каждый из мероморфных ростков в точке a, удовлетворяющих уравнению $T=0$, соответствует точке римановой поверхности уравнения, лежащей над точкой a.*

§ 3. Конечнолистные разветвленные накрытия и алгебраические расширения полей мероморфных функций

Пусть $\pi: M \to X$ — конечнолистное разветвленное накрытие. Теория Галуа и теорема существования Римана позволяют описать связь поля $K(M)$ мероморфных функций на M с полем $K(X)$ мероморфных функций на X. Поле $K(M)$ является алгебраическим расширением поля $K(X)$, и каждое алгебраическое расширение поля $K(X)$ получается таким способом. Этот параграф посвящен связи между конечнолистными разветвленными накрытиями над многообразием X и алгебраическими расширениями поля $K(X)$.

В п. 3.1 определяется поле $P_a(O)$, состоящее из мероморфных ростков в точке $a \in X$, которые мероморфно продолжаются до конечнозначных функций на $X \setminus O$, имеющих алгебраические особенности в точках множества O.

В п. 3.2 рассматривается действие группы $\pi_1(X \setminus O, a)$ на поле $P_a(O)$ и к действию этой группы автоморфизмов применяются результаты теории Галуа. Описывается соответствие между подполями поля $P_a(O)$, являющимися алгебраическими расширениями поля $K(X)$, и подгруппами конечного индекса в фундаментальной группе $\pi_1(X \setminus O, a)$. Доказывается, что это соответствие является взаимно однозначным (в доказательстве кроме теории Галуа используется теорема существования Римана). Показывается, что риманова поверхность уравнения, ветвление которой находится над множеством O, связна, если и только если уравнение неприводимо. При этом поле мероморфных функций на римановой поверхности неприводимого уравнения совпадает с алгебраическим расширением поля $K(X)$, полученным присоединением корня этого уравнения.

В п. 3.3 показывается, что поле мероморфных функций на всяком связном разветвленном конечнолистном накрытии над X является алгебраическим расширением поля X, причем разным накрытиям соответствуют разные расширения.

3.1. Поле $P_a(O)$ ростков в точке a алгебраических функций, ветвящихся над множеством O. Пусть X — связное комплексное многообразие, O — дискретное подмножество в X и a — отмеченная точка в X, не принадлежащая множеству O.

Обозначим через $P_a(O)$ совокупность ростков мероморфных функций в точке a, обладающих следующими свойствами. Росток φ_a принадлежит $P_a(O)$, если

1) росток φ_a мероморфно продолжается вдоль любой кривой, начинающейся в точке a и лежащей в $X \setminus O$;

2) для ростка при φ_a существует подгруппа $G_0 \subset \pi_1(X, a)$ конечного индекса в группе $\pi_1(X \setminus O, a)$, такая что при продолжении ростка φ_a вдоль кривой из подгруппы G_0 получается исходный росток φ_a;

3) многозначная аналитическая функция на $X \setminus O$, получающаяся при продолжении ростка φ_a, имеет в точках множества O алгебраические особые точки.

Поговорим подробнее о свойстве 3. Пусть $\gamma\colon [0, 1] \to X$ — любая кривая, идущая из точки a в особую точку $o \in O$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = o$, по области $X \setminus O$, т. е. $\gamma(t) \in X \setminus O$ при $t < 1$. Свойство 3 означает, что для значений параметра t, достаточно близких к единице, $t_0 < t < 1$, ростки, полученные при мероморфном продолжении φ_a вдоль кривой γ до точки t, будут аналитическими и что они в малой проколотой окрестности V_o^* точки o определят k-значную аналитическую функцию φ_γ. Ограничение функции φ_γ на малый проколотый координатный диск $D^*_{|u|<r}$ с центром в точке o, где u — локальная координатная функция около точки o, $u(o) = 0$, должно иметь алгебраическую особенность в смысле определения из п. 2.1. Последнее условие не зависит от выбора координатной функции u. Оно означает, что функция φ_γ раскладывается в ряд Пюизо по u (т. е. она растет не быстрее чем степенным образом при подходе к точке o).

Лемма 3.1. *Множество ростков $P_a(O)$ является полем. На поле $P_a(O)$ действует фундаментальная группа G области $X \setminus O$ при помощи операции мероморфного продолжения. Полем инвариантов относительно этого действия является поле мероморфных функций на многообразии X.*

Доказательство. Пусть ростки $\varphi_{1,a}$ и $\varphi_{2,a}$ лежат в множестве $P_a(O)$ и не меняются при продолжениях вдоль подгрупп G_1, G_2 конечного индекса в группе $G = \pi_1(X \setminus O, a)$. Тогда ростки $\varphi_{1,a} \pm \varphi_{2,a}$, $\varphi_{1,a}\varphi_{2,a}$ и $\varphi_{1,a}/\varphi_{2,a}$ (росток $\varphi_{1,a}/\varphi_{2,a}$ определен, если $\varphi_{2,a}$ не равен тождественно нулю) мероморфно продолжаются вдоль любой кривой, начинающейся в точке a и лежащей в области $X \setminus O$, и не меняются при продолжении вдоль подгруппы $G_1 \cap G_2$ конечного индекса в группе $G = \pi_1(X \setminus O, a)$.

Многозначные функции, определенные этими ростками, имеют алгебраические особенности в точках множества O, так как ростки функций, представимых рядами Пюизо, образуют поле. (Разумеется, нельзя производить арифметические операции над многозначными функциями. Однако для фиксированной кривой, входящей в точку 0, можно производить арифметические операции над фиксированными ветвями функций, раскладывающихся в ряды Пюизо. В результате получится ветвь функции, представимой рядом Пюизо.)

Итак, мы показали, что $P_a(O)$ является полем. Мероморфное продолжение сохраняет арифметические операции. Поэтому фундаментальная группа G действует на $P_a(O)$ автоморфизмами. Поле инвариантов состоит из ростков поля $P_a(O)$, являющихся ростками мероморфных функций в области $X \setminus O$. В точках множества O эти однозначные функции имеют алгебраические особенности и являются, следовательно, мероморфными функциями на многообразии X. Лемма доказана. □

3.2. Теория Галуа действия фундаментальной группы на поле $P_a(O)$. В этом пункте мы применим теорию Галуа к действию фундаментальной группы $\pi_1(X \setminus O, a)$ на поле $P_a(O)$.

Теорема 3.2. 1. *Каждый элемент φ_a поля $P_a(O)$ алгебраичен над полем $K(X)$.*

2. *Множество ростков в точке a, удовлетворяющих тому же неприводимому уравнению, что и росток φ_a, совпадает с орбитой ростка φ_a при действии группы G.*

3. *Росток φ_a лежит в поле, полученном присоединением к полю $K(X)$ элемента f_a поля $P_a(O)$, если и только если при действии группы G стационарная группа ростка φ_a содержит стационарную группу ростка f_a.*

Доказательство п. 1 и 2 получается применением теоремы 3.2 из главы 2, п. 3 — применением теоремы 3.6 из главы 2. □

Пункт 1 теоремы 3.2 можно переформулировать так.

Утверждение 3.3. *Мероморфный росток в точке a лежит в поле $P_a(O)$, если и только если он удовлетворяет неприводимому уравнению $T=0$, множество точек ветвления которого содержится в множестве O.*

Пункт 2 теоремы 3.2 эквивалентен следующему утверждению.

Утверждение 3.4. *Уравнение $T = 0$, множество точек ветвления которого содержится в множестве O, неприводимо, если и только если риманова поверхность этого уравнения связна.*

Доказательство. Пусть $f: M \to X$ — риманова поверхность уравнения, множество точек ветвления которого содержится в множестве O. Согласно п. 2 теоремы уравнение неприводимо, если и только если многообразие $M \setminus f^{-1}(O)$ связно. Действительно, связность накрывающего пространства эквивалентна тому, что слой $F = f^{-1}(a)$ лежит в одной компоненте связности накрывающего пространства. Это, в свою очередь, эквивалентно транзитивности действия группы монодромии на слое F. Осталось заметить, что многообразие M связно, если и только если связно многообразие $M \setminus f^{-1}(O)$, полученное выбрасыванием из M дискретного подмножества. □

Утверждение 3.5. *Подполе поля $P_a(O)$ является нормальным расширением поля $K(X)$, если и только если оно получено присоединением к $K(X)$ всех ростков в точке a многозначной функции на X, удовлетворяющих неприводимому алгебраическому уравнению $T=0$ над $K(X)$, ветвление которого содержится в O. Группа Галуа этого нормального расширения изоморфна группе монодромии римановой поверхности уравнения $T=0$.*

Доказательство. Нормальное расширение всегда получается присоединением всех корней неприводимого уравнения. В ситуации утверждения ветвление этого уравнения должно содержаться в O. Как группа Галуа нормального расширения, так и группа монодромии уравнения $T = 0$ изоморфны образу фундаментальной группы $\pi_1(X \setminus O, a)$ на орбите ее действия на поле $P_a(O)$, состоящей из всех ростков в точке a, удовлетворяющих уравнению $T=0$. □

Рассмотрим риманову поверхность уравнения $T = 0$, которому удовлетворяет росток $\varphi_a \in P_a(O)$. Точки этой римановой поверхности, лежащие над точкой a, соответствуют корням уравнения $T=0$ в поле $P_a(O)$. Росток φ_a — один из этих корней. Итак, мы сопоставили каждому ростку φ_a поля $P_a(O)$, во-первых, разветвленное накрытие $\pi_{\varphi_a} : M_{\varphi_a} \to X$, множество критических точек которого содержится в O, и, во-вторых, отмеченную точку $\varphi_a \in M_{\varphi_a}$, лежащую над точкой a (мы обозначаем символом φ_a точку римановой поверхности, соответствующую ростку φ_a). Пункт 3 теоремы 3.2 можно переформулировать следующим образом.

Утверждение 3.6. *Росток φ_a лежит в поле, полученном присоединением к полю $K(X)$ элемента f_a поля $P_a(O)$, если и только если разветвленное накрытие $\pi_{\varphi_a} : (M_{\varphi_a}, \varphi_a) \to (X, a)$ подчинено разветвленному накрытию $\pi_{f_a} : (M_{f_a}, f_a) \to (X, a)$.*

Действительно, согласно классификации разветвленных накрытий с отмеченными точками накрытие, соответствующее ростку φ_a, подчинено накрытию, соответствующему ростку f_a, если и только если стационарная группа ростка φ_a при действии фундаментальной группы $\pi_1(X \setminus O)$ содержит стационарную группу ростка f_a.

Следствие 3.7. *Поля, полученные присоединением к полю $K(X)$ элементов φ_a и f_a поля $P_a(O)$, совпадают, если и только если разветвленные накрытия с отмеченными точками $\pi_{\varphi_a} : (M_{\varphi_a}, \varphi_a) \to$ $\to (X, a)$ и $\pi_{f_a} : (M_{f_a}, f_a) \to (X, a)$ эквивалентны.*

Верно ли, что для любой подгруппы G, имеющей конечный индекс в фундаментальной группе $\pi_1(X \setminus O)$, существует росток $f_a \in$ $\in P_a(O)$, стационарная группа которого равна G?

Ответ на этот вопрос положителен. Одной теории Галуа для доказательства этого факта недостаточно: чтобы алгебраические рассуждения было к чему применять, необходимо иметь много мероморфных функций на многообразии[1]. Нам будет достаточно

[1]Теория Галуа позволяет получить следующий результат. Пусть для подгруппы G ответ на вопрос положителен, и пусть $f_a \in P_a(O)$ — росток, стационарная группа которого равна G. Тогда для всякой группы, содержащей группу H, где H — наибольший нормальный делитель, лежащий в группе G, ответ тоже положителен. Для доказательства нужно применить основную теорему теории Галуа для минимального расширения Галуа поля $K(X)$, содержащего росток f_a.

сформулированного ниже факта, который мы будем называть теоремой существования Римана и применять без доказательства. (Доказательство использует функциональный анализ и совсем не алгебраично. Отметим, что есть двумерные компактные комплексные аналитические многообразия, единственными мероморфными функциями на которых являются константы.)

Теорема существования Римана. *Для всякого конечного подмножества любого одномерного аналитического многообразия существует функция, мероморфная на многообразии, аналитичная в окрестности подмножества и принимающая в разных точках подмножества разные значения.*

Теорема 3.8. *Для любой подгруппы G конечного индекса в фундаментальной группе $\pi_1(X \setminus O)$ существует росток $f_a \in P_a(O)$, стационарная группа которого равна G.*

Доказательство. Пусть $\pi_1(M, b) \to (X, a)$ — конечнолистное разветвленное накрытие над X, критические значения которого лежат в O и которое соответствует подгруппе $G \subset \pi_1(X \setminus O)$. Обозначим через $F = f^{-1}(a)$ слой накрытия над точкой a. По теореме существования Римана на многообразии M существует мероморфная функция, принимающая различные значения в точках множества F. Пусть $\pi_{b,a}^{-1}$ — росток отображения, обратный к проекции π и переводящий точку a в точку b. Росток функции $f \circ \pi_{b,a}^{-1}$ по построению лежит в поле $P_a(O)$, и его стационарная группа при действии фундаментальной группы $\pi_1(X \setminus O)$ равна группе G. $\square$

Итак, мы показали, что классификация алгебраических расширений поля $K(X)$ мероморфных функций на многообразии X, содержащихся в поле $P_a(O)$, эквивалентна классификации разветвленных конечнолистных накрытий $\pi\colon (M, b) \to (X, a)$, критические значения которых лежат в множестве O. И те, и другие объекты классифицируются подгруппами конечного индекса в фундаментальной группе $\pi_1(X \setminus O, a)$. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.9. *Соответствие между подгруппами конечного индекса в фундаментальной группе и алгебраическими расширениями поля $K_a(M)$, лежащими в поле $P_a(O)$, взаимно однозначно. Если подгруппа G_1 лежит в подгруппе G_2, то поле, соответствующее группе G_2, лежит в поле, соответствующем подгруппе G_1. Подполе в $P_a(O)$ является расширением Галуа поля $K_a(X)$, если ему соответствует некоторый нормальный делитель H фундаментальной* *группы. Группа Галуа этого расширения изоморфна факторгруппе* $\pi_1(X \setminus O, a)/H$.

3.3. Поле функций на разветвленном накрытии. Здесь мы показываем, что неприводимые алгебраические уравнения над полем $K(X)$ задают изоморфные расширения этого поля, если и только если римановы поверхности этих уравнений задают эквивалентные разветвленные накрытия над многообразием X.

Из утверждения 3.4 вытекает такое следствие.

Следствие 3.10. *Алгебраическое уравнение над полем* $K(X)$ *неприводимо, если и только если его риманова поверхность связна.*

Пусть $\pi\colon (M, b) \to (X, a)$ — конечнолистное накрытие с отмеченными точками, многообразие M связно и точка a не принадлежит множеству критических значений отображения π. Применим результаты о поле $P_a(O)$ и его подполях для описания поля мероморфных функций на M. Здесь полезна следующая конструкция.

Обозначим через $\pi^{-1}_{b,a}$ росток в точке a обратного отображения к проекции π, переводящего точку a в точку b. Пусть $K_b(M)$ — поле ростков в точке b мероморфных функций на многообразии M. Это поле изоморфно полю $K(M)$. Отображение $(\pi^{-1}_{b,a})^*$ вкладывает поле $K_b(M)$ в поле $P_a(O)$. Выбирая различные прообразы b точки a, мы получим различные вложения поля $K(M)$ в поле $P_a(O)$.

Пусть уравнение $T = 0$ неприводимо над полем $K(X)$. Тогда его риманова поверхность M связна и мероморфные функции на ней образуют поле $K(M)$. Поле $K(M)$ содержит подполе $\pi^*(K(X))$, изоморфное полю мероморфных функций на многообразии M. Пусть $y: M \to \mathbb{C}P^1$ — мероморфная функция, фигурирующая в определении римановой поверхности. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.11. *Поле* $K(M)$ *мероморфных функций на поверхности* M *порождено функцией* y *над своим подполем* $\pi^*(K(X))$. *Функция* y *удовлетворяет неприводимому алгебраическому уравнению* $T = 0$ *над подполем* $\pi^*(K(X))$.

Доказательство. Пусть $b \in M$ — точка на многообразии M, проектирующаяся в точку a, $\pi(b) = a$, и $\pi^{-1}_{b,a}$ — росток в точке a обратного отображения, переводящего точку a в точку b. Обозначим через $K_b(M)$ поле ростков в точке b мероморфных функций на многообразии M. Это поле изоморфно полю $K(M)$. Отображение $(\pi^{-1}_{b,a})^*$ вкладывает поле $K_b(M)$ в поле $P_a(O)$.

Для каждой мероморфной функции $g\colon M \to \mathbb{C}P^1$ росток $g_b \circ \pi_a^{-1}$ лежит в поле $P_a(O)$. Стационарная группа этого ростка относительно действия группы $\pi_1(X \setminus O, a)$ содержит стационарную подгруппу точки b относительно действия группы монодромии. Для ростка $y_b \circ \pi_a^{-1}$ стационарная группа равна стационарной группе точки b при действии группы монодромии, так как функция y по определению принимает различные значения в точках слоя $\pi^{-1}(a)$. Теперь утверждение вытекает из п. 2 теоремы 3.2. □

Теорема 3.12. *Неприводимые уравнения $T_1=0$ и $T_2=0$ над полем $K(X)$ задают изоморфные расширения этого поля, если и только если разветвленные накрытия $\pi_1\colon M_1 \to X$ и $\pi_2\colon M_2 \to X$, фигурирующие в определении римановых поверхностей этих уравнений, задают эквивалентные разветвленные накрытия над многообразием X.*

Доказательство. Точки римановых поверхностей уравнений $T_1=0$ и $T_2=0$, лежащие над почти каждой точкой x многообразия X, однозначно задаются значениями корней y_1 и y_2 уравнений $T_1=0$ и $T_2=0$ над точкой x. Если уравнения $T_1=0$ и $T_2=0$ определяют одинаковые расширения поля $K(X)$, то $y_1=Q_1(y_2)$ и $y_2=Q_2(y_1)$, где Q_1, Q_2 — полиномы с коэффициентами из поля $K(X)$. Эти полиномы задают определенное почти над каждой точкой x обратимое отображение одной римановой поверхности в другую, которое коммутирует с проекциями этих поверхностей на X. По непрерывности оно продолжается до изоморфизма накрытий.

Если римановы поверхности уравнений имеют эквивалентные накрытия, то отображение $h\colon M_1 \to M_2$, устанавливающее эквивалентность, коммутирует с проекциями и поэтому аналитично. Отображение $h^*\colon K(M_2) \to K(M_1)$ устанавливает изоморфизм полей $K(M_1)$ и $K(M_2)$ и переводит подполе $\pi_2^*(K(X))$ в подполе $\pi_1^*(K(X))$, так как $\pi_1=\pi_2 \circ h$. □

§ 4. Геометрия теории Галуа для расширений поля мероморфных функций

В этом параграфе мы подводим итоги. В п. 4.1 мы обсуждаем связь между нормальными разветвленными накрытиями над связным комплексным многообразием X и расширениями Галуа поля $K(X)$. В п. 4.2 эта связь применяется для описания расширений поля сходящихся рядов Лорана.

В п. 4.3 идет речь о компактных одномерных комплексных многообразиях. Теория Галуа помогает описать поле мероморфных функций на компактном многообразии, а геометрия разветвленных накрытий позволяет достаточно явно описать все алгебраические расширения поля рациональных функций от одного переменного.

Группа Галуа расширения поля рациональных функций совпадает с группой монодромии римановой поверхности алгебраической функции, задающей это расширение. Поэтому теория Галуа доставляет топологическое препятствие к представимости алгебраических функций в радикалах.

4.1. Расширения Галуа поля $K(X)$. Согласно теореме 3.12 алгебраические расширения поля мероморфных функций на связном комплексном многообразии X имеют прозрачную геометрическую классификацию, совпадающую с классификацией связных конечнолистных разветвленных накрытий над многообразием X. При этом расширениям Галуа поля $K(X)$ соответствуют нормальные разветвленные накрытия многообразия X. Опишем геометрически все промежуточные расширения для таких расширений Галуа.

Пусть X — связное аналитическое многообразие, $\pi\colon M \to X$ — связное нормальное разветвленное конечнолистное накрытие над X, O — конечное множество в X, содержащее все критические значения отображения π, и $a \in X$ — любая точка, не лежащая в O. Мы имеем поле мероморфных функций $K(X)$ на многообразии X и его расширение Галуа — поле $K(M)$ мероморфных функций на многообразии M.

Согласно утверждению 2.9 из этой главы промежуточные разветвленные накрытия $M \xrightarrow{h_1} Y_1 \xrightarrow{f_1} X$ находятся во взаимно однозначном соответствии с подгруппами группы N преобразования наложения нормального накрытия $\pi\colon M \to X$. С каждым промежуточным накрытием $M \xrightarrow{h_1} Y_1 \xrightarrow{f_1} X$ связано подполе $h_1^*(K(Y_1))$ поля $K(M)$ мероморфных функций на многообразии M. Из основной теоремы теории Галуа видно, что каждое промежуточное поле между полями $K(M)$ и $\pi^*K(X)$ имеет такой вид, т. е. является полем $h^*(K(Y))$ для некоторого промежуточного разветвленного накрытия $M \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{f} X$. При этом промежуточные расширения Галуа соответствуют промежуточным нормальным накрытиям $M \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{f} X$, а группы Галуа промежуточных расширений Галуа равны группам преобразования наложения соответствующих промежуточных нормальных накрытий.

Вот немного другое описание того же расширения Галуа. На нормальном разветвленном накрытии M действует конечная группа N автоморфизмов наложения. С каждой подгруппой G группы N связано подполе $K_N(M)$ мероморфных функций на M, инвариантных относительно группы G.

Утверждение 4.1. *Поле $K(M)$ является расширением Галуа поля $K_N(M) = \pi^*(K(X))$. Группа Галуа этого расширения Галуа равна N. При соответствии Галуа подгруппе $G \subset N$ соответствует поле $K_G(M)$.*

4.2. Алгебраические расширения поля ростков мероморфных функций. В этом пункте связь между нормальными накрытиями и расширениями Галуа применяется для описания алгебраических расширений поля сходящихся рядов Лорана.

Пусть L_0 — поле ростков мероморфных функций в точке $0 \in \mathbb{C}^1$. Это поле можно отождествить с полем сходящихся рядов Лорана $\sum\limits_{m>m_0} c_m x^m$.

Теорема 4.2. *Для каждого k существует единственное расширение степени k поля L_0. Оно порождено элементом $z = x^{1/k}$. Это расширение нормально, его группа Галуа равна $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Пусть $y^k + a_{k-1}y^{k-1} + \ldots + a_0 = 0$ — неприводимое уравнение над полем L_0. Из неприводимости уравнения вытекает существование малого открытого диска D_r с центром в точке 0, такого что 1) ряды Лорана коэффициентов a_i, $i = 1, \ldots, k$, сходятся в проколотом диске D_r^*; 2) уравнение неприводимо над полем $K(D_r)$ мероморфных функций в диске D_r; 3) дискриминант уравнения отличен от нуля во всех точках проколотого диска D_r^*.

Пусть $\pi\colon M \to D_r$ — риманова поверхность полученного неприводимого уравнения над диском D_r. По условию в диске D_r лишь точка 0 является критическим значением отображения π. Фундаментальная группа проколотого диска D_r^* изоморфна аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$. Группа $k\mathbb{Z}$ является единственной подгруппой индекса k в группе $\mathbb{Z}$. Эта подгруппа является нормальным делителем, и факторгруппа $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ является циклической группой порядка k. Поэтому существует единственное расширение степени k. Оно соответствует ростку k-листного накрытия $f\colon (\mathbb{C}^1, 0) \to (\mathbb{C}^1, 0)$, где $f(z) = z^k$, нормально, и его группа Галуа равна $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Далее, функция $z\colon D_q \to \mathbb{C}^1$, где $q = r^{1/k}$, разделяет все прообразы точки $a \in D_r^*$ при отображении $x = z^k$. Поэтому функция $z = x^{1/k}$ порождает поле $K(D_q)$ над полем $K(D_r)$. Теорема доказана. $\square$

Согласно теореме функция z и ее степени 1, $z = x^{1/k}$, ..., $z^{k-1} = x^{(k-1)/k}$ образуют базис в расширении L степени k поля L_0, рассматриваемого как векторное пространство над полем L_0. Функции $y \in L$ можно рассматривать как многозначные функции от x. Разложение элемента $y \in L$ по базису $y = f_0 + f_1 z + \ldots + f_{k-1} z^{k-1}$, $f_0, \ldots, f_{k-1} \in L_0$, эквивалентно разложению $y(x) = f_0(x) + f_1(x)x^{1/k} + \ldots + f_{k-1}(x)x^{(k-1)/k}$ многозначной функции $y(x)$ в ряд Пюизо.

Отметим, что элементы $1, z, \ldots, z^{k-1}$ являются собственными векторами изоморфизма поля L над полем L_0, порождающего группу Галуа и соответствующего обходу вокруг точки 0. Собственные числа этих векторов соответственно равны $1, \xi, \ldots, \xi^{k-1}$, где ξ — первообразный корень из единицы степени k. Существование такого базиса доказывается в теории Галуа (см. утверждение 1.1 главы 2).

Замечание. Поле L_0 во многом аналогично конечному полю $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, а обход вокруг точки нуль аналогичен изоморфизму Фробениуса. Действительно, у каждого из этих полей для каждого натурального k есть единственное алгебраическое расширение степени k. Каждое из этих расширений нормально, группа Галуа каждого из них есть циклическая группа из k элементов. Образующая группы Галуа расширения первого поля соответствует петле, обходящей точку нуль, а образующая группы Галуа расширения второго поля является изоморфизмом Фробениуса. Аналогичные свойства имеет любое конечное поле. Для поля F_q, содержащего $q = p^n$ элементов, роль петли, обходящей точку нуль, играет n-я степень автоморфизма Фробениуса.

4.3. Алгебраические расширения поля рациональных функций. Рассмотрим теперь случай связных компактных комплексных многообразий. Применяя теорию Галуа, мы покажем, что поле мероморфных функций на таком многообразии является конечным расширением степени трансцендентности один поля комплексных чисел. С другой стороны, геометрия разветвленных накрытий над сферой Римана дает ясное описание всех конечных алгебраических расширений поля рациональных функций.

Сфера Римана $\mathbb{C}P^1$ является простейшим из компактных комплексных многообразий. Будем считать, что на проективной прямой $\mathbb{C}P^1$ фиксированы бесконечно удаленная точка ∞, $\mathbb{C}^1 \cup \{\infty\} = \mathbb{C}P^1$, и координатная функция $x: \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$, имеющая полюс первого порядка в точке ∞. Каждая мероморфная функция на $\mathbb{C}P^1$ является рациональной функцией от x.

Скажем, что пара мероморфных функций f, g на многообразии M разделяет почти все точки многообразия M, если существует конечное множество $A \subset M$, такое что вектор-функция (f, g) определена на множестве $M \setminus A$ и принимает в его точках разные значения.

Теорема 4.3. *Пусть M — связное компактное одномерное комплексное многообразие. Тогда*

1) *любые две мероморфные функции f, g на M связаны некоторым полиномиальным соотношением* (т. е. существует полином Q от двух переменных, для которого выполняется тождество $Q(f, g) \equiv 0$);

2) *если функции f, g разделяют почти все точки многообразия M, то каждая мероморфная функция φ на многообразии M является композицией рациональной функции R двух переменных с функциями f и g, $\varphi = R(f, g)$.*

Доказательство. 1. Если функция f тождественно равна константе C, то в качестве полиномиального соотношения можно взять тождество $f \equiv C$. В противном случае отображение $f: M \to \mathbb{C}P^1$ является разветвленным накрытием с некоторым множеством точек ветвления O. Осталось воспользоваться п. 1 теоремы 3.2.

2. Если функция f тождественно равна константе, то функция g принимает различные значения в точках множества $M \setminus A$. Следовательно, разветвленное накрытие $g: M \to \mathbb{C}P^1$ является взаимно однозначным отображением многообразия M на сферу Римана $\mathbb{C}P^1$. В этом случае каждая мероморфная функция φ на M является композицией рациональной функции R одной переменной с функцией g, $\varphi = R(g)$.

Если функция f не равна тождественно константе, то она задает разветвленное накрытие $f: M \to \mathbb{C}P^1$ над сферой Римана $\mathbb{C}P^1$. Пусть O — объединение образа множества A при отображении f и множества критических значений отображения f, $a \notin O$ — любая точка сферы Римана, не лежащая в O, и F — слой разветвленного накрытия $f: M \to \mathbb{C}P^1$ над точкой a. По условию функция f должна разделять точки множества F. Осталось воспользоваться п. 3 теоремы 3.2. $\square$

Пусть

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \tag{15}$$

— неприводимое уравнение над полем рациональных функций. Риманова поверхность $\pi: M \to \mathbb{C}P^1$ этого уравнения называется также *римановой поверхностью алгебраической функции,* определенной этим уравнением, а группа монодромии разветвленного накрытия $\pi: M \to \mathbb{C}P^1$ называется также *группой монодромии* этой алгебраической функции. Согласно утверждению 3.5 группа Галуа уравнения (15) совпадает с группой монодромии.

Итак, группа Галуа неприводимого уравнения (15) над полем рациональных функций имеет топологический смысл: она равна группе монодромии римановой поверхности алгебраической функции, определенной уравнением (15). Совпадение группы Галуа уравнения (15) и группы монодромии алгебраической функции, определенной этим уравнением, было известно Фробениусу, но, возможно, было открыто еще раньше.

Результаты теории Галуа доставляют топологическое препятствие к разрешимости уравнения (15) в радикалах и в k-радикалах. Из теории Галуа вытекают следующие теоремы.

Теорема 4.4. *Алгебраическая функция y, определенная уравнением* (15), *представима в радикалах над полем рациональных функций, если и только если ее группа монодромии разрешима.*

Теорема 4.5. *Алгебраическая функция y, определенная уравнением* (15), *представима в k-радикалах над полем рациональных функций, если и только если ее группа монодромии k-разрешима.*

Связные разветвленные накрытия над сферой Римана $\mathbb{C}P^1$, критические значения которых лежат в фиксированном конечном множестве O, допускают полное конечное описание. Связные k-листные разветвленные накрытия с отмеченной точкой $\pi: (M, b) \to$ $\to (\mathbb{C}P^1 \setminus O, a)$ классифицируются подгруппами индекса k в фундаментальной группе $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus O)$. Для каждой группы G справедлива следующая лемма.

Лемма 4.6. *Классификация подгрупп индекса k группы G эквивалентна классификации транзитивных действий группы G на множестве с отмеченной точкой, содержащем k точек.*

Доказательство. Действительно, с подгруппой G_0 индекса k в группе G связано транзитивное действие группы G на множестве правых классов смежности группы G по подгруппе G_0, состоящем из k элементов. В этом множестве отмечен правый класс смежности единичного элемента. Обратно, каждому транзитивному действию группы G на множестве из k точек, из которых одна точка отмечена, соответствует стационарная подгруппа G_0 отмеченной точки, имеющая индекс k в группе G. $\square$

Фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus O, a)$ свободная с конечным числом образующих. Она имеет конечное число различных транзитивных действий на множестве из k точек, которые можно перечислить. Вот их описание.

Занумеруем точки множества O. Пусть оно содержит $m+1$ точку. Фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus O, a)$ является свободной группой, порожденной кривыми $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, где γ_i — кривая, обходящая i-ю точку множества O. Возьмем множество из k элементов, в котором одна точка отмечена. В группе $S(k)$ перестановок этого множества произвольным образом выбираем m элементов $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. Нас интересуют упорядоченные наборы $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, подчиненные одному-единственному условию: нужно, чтобы группа перестановок, порожденная этими элементами, была транзитивной. Есть конечное число наборов элементов $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. Их можно перебрать и выбрать все наборы, порождающие транзитивные группы. С каждым таким набором связано единственное разветвленное накрытие $\pi\colon (M, b) \to (\mathbb{C}P^1, a)$ с отмеченной точкой. Оно соответствует стационарной подгруппе отмеченного элемента при гомоморфизме $F\colon \pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus O, a) \to S(k)$, переводящем образующую γ_i в элемент σ_i. Итак, за конечное число операций можно перечислить все транзитивные действия $F\colon \pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus O, a) \to S(k)$ фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus O, a)$ на множестве из k элементов.

На конечном множестве гомоморфизмов $F\colon \pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus O, a) \to S(k)$, образ которых транзитивен, действует конечная группа гомоморфизмов сопряжения группы $S(k)$. Орбиты действия конечной группы на конечном множестве можно перечислить. Поэтому классы сопряженности подгрупп индекса k в фундаментальной группе тоже можно перечислить за конечное число операций.

Итак, мы получаем полное геометрическое описание всевозможных расширений Галуа поля рациональных функций одной переменной. Отметим, что в этом описании мы использовали теорему существования Римана. Теорема Римана не помогает описывать алгебраические расширения других полей, скажем, поля рациональных чисел. Вопрос об описании алгебраических расширений поля рациональных чисел еще открыт. Неизвестно, например, существует ли расширение поля рациональных чисел, у которого группа Галуа — заданная конечная группа.

Глава 5

ОДНОМЕРНАЯ ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЛУА

Группа монодромии алгебраической функции совпадает с группой Галуа расширения поля рациональных функций, связанного с этой алгебраической функцией. Поэтому группа монодромии отвечает за представимость алгебраической функции в радикалах. Но группа монодромии есть не только у алгебраических функций. Она определена для логарифма, арктангенса и для многих, многих других функций, для которых группа Галуа не имеет смысла. Естественно попытаться для таких функций использовать группу монодромии вместо группы Галуа для доказательства непринадлежности функции тому или иному лиувиллевскому классу. Именно этот подход реализуется в одномерной топологической теории Галуа ([37]–[41], [45], [47]).

В одномерном варианте топологической теории Галуа мы рассматриваем функции, представимые в квадратурах, как многозначные аналитические функции одного комплексного переменного. Оказывается, что существуют топологические ограничения на характер расположения над комплексной плоскостью римановой поверхности функции, представимой в квадратурах. Если функция не удовлетворяет этим ограничениям, то ее нельзя выразить в квадратурах.

Этот подход, кроме геометрической наглядности, имеет следующее преимущество. Топологические запреты относятся к характеру многозначности функции. Они сохраняются не только для функций, представимых в квадратурах, но и для значительно более широкого класса функций. Этот более широкий класс получится, если к функциям, представимым в квадратурах, добавить все мероморфные функции и разрешить им участвовать во всех формулах. Из-за этого топологические результаты о непредставимости в квадратурах оказываются более сильными, чем алгебраические. Дело в том, что суперпозиция функций — не алгебраическая операция. В дифференциальной алгебре вместо суперпозиции функций рассматривается дифференциальное уравнение, которому она удовлетворяет. Но, например, Г-функция Эйлера не удовлетворяет никакому алгебраическому дифференциальному уравнению. Поэтому безнадежно искать уравнение, которому удовлетворяет, скажем, функция $\Gamma(\exp x)$. Единственные известные результаты о непредставимости функций в квадратурах и, скажем, в Г-функциях Эйлера получены только нашим методом.

С другой стороны, этим методом невозможно доказать непредставимость в квадратурах какой-либо однозначной мероморфной функции.

Используя дифференциальную теорию Галуа (точнее, ее линейно-алгебраическую часть, имеющую дело с алгебраическими матричными группами и их дифференциальными инвариантами), можно показать, что единственные причины неразрешимости в квадратурах линейных дифференциальных уравнений типа Фукса топологические (ср. § 1 главы 6). Другими словами, если к разрешимости в квадратурах дифференциального уравнения типа Фукса не существует топологических препятствий, то оно решается в квадратурах.

Существуют следующие топологические препятствия к представимости функций в квадратурах, обобщенных квадратурах и в k-квадратурах.

Во-первых, функции, представимые в обобщенных квадратурах, и, в частности, функции, представимые в квадратурах и в k-квадратурах, могут иметь не более чем счетное число особых точек на комплексной плоскости (см. § 4). (Хотя уже для простейших функций, представимых в квадратурах, множество особых точек может быть всюду плотным!)

Во-вторых, группа монодромии функции, представимой в квадратурах, обязательно разрешима (см. п. 7.2). (Хотя уже для простейших функций, представимых в квадратурах, группа монодромии может содержать континуум элементов!)

Аналогичные ограничения на расположение римановой поверхности существуют и для функций, представимых в обобщенных квадратурах и в k-квадратурах. Однако эти ограничения формулируются сложнее. В них группа монодромии фигурирует не как абстрактная группа, а как группа перестановок множества листов функции. Другими словами, в этих ограничениях фигурирует не только группа монодромии, но и *монодромная пара* функции, состоящая из ее группы монодромии и стационарной подгруппы некоторого ростка (см. п. 5.3).

В § 1 обсуждается понятие топологической неразрешимости, принадлежащее В. И. Арнольду, и приводится его доказательство топологической неэлементарности эллиптических функций. В § 2 приводится критерий представимости функций в радикалах, доказательство которого содержит идею топологической теории Галуа.

§ 1. О топологической неразрешимости

Арнольд доказал топологическую неразрешимость ряда классических задач математики [3]–[10]. Среди них задача о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах (см. § 2).

Как показал еще Жордан, группа Галуа алгебраического уравнения над полем рациональных функций имеет топологическую интерпретацию. Рассмотрим неприводимое алгебраическое уравнение

$$y^n + r_1 y^{n-1} + \ldots + r_n = 0 \tag{16}$$

над полем рациональных функций P_S, $r_i \in P_S$. *Группа Галуа уравнения* (16) *над полем рациональных функций изоморфна группе монодромии* (*многозначной*) *алгебраической функции* y, *определенной уравнением* (16). Из теории Галуа вытекает такое следствие.

Следствие 1.1. 1. *Алгебраическая функция представима в радикалах, если и только если ее группа монодромии разрешима.*

2. *Алгебраическая функция представима в k-радикалах, если и только если ее группа монодромии k-разрешима.*

Приведем принадлежащее В. И. Арнольду определение.

Определение (Арнольд). Отображение $f: X \to Y$ называется *топологически нехорошим* (например, топологически неэлементарной функцией), если среди (лево-право) топологически эквивалентных ему нет хороших (например, элементарных).

С каждой многозначной аналитической функцией f комплексного переменного связаны ее риманова поверхность M_f и проекция $\pi_f : M_f \to S^2$ этой поверхности на сферу Римана S^2.

Следствие 1.2. *Пусть проекции π_f и π_g римановых поверхностей M_f и M_g функций f и g на сферу Римана топологически эквивалентны. Тогда функции f и g представимы или непредставимы в радикалах* (*k-радикалах*) *одновременно* (т. е. топологический тип проекции римановой поверхности функции на сферу Римана отвечает за представимость функции в радикалах и в k-радикалах).

Доказательство. Следствие 1.2 немедленно вытекает из следствия 1.1. Действительно, алгебраичность функции связана с компактностью ее римановой поверхности, ее представимость в радикалах связана с разрешимостью ее группы монодромии, а ее представимость в k-радикалах связана с k-разрешимостью ее группы монодромии. Все эти свойства топологические. □

Для алгебраических функций группа Галуа совпадает с группой монодромии. Это дает возможность отдельно доказывать относящиеся к теории Галуа результаты об алгебраических функциях, не вводя общих определений и не доказывая общих теорем. Классики широко пользовались этим приемом. Так, в книге [53] в параграфе, посвященном группе монодромии, читаем: «Нижеследующие теоремы убедят в этом [в том, что группа монодромии есть группа Галуа, — *А. Хованский*] знающего теорию Галуа, а незнающий получит в них понятие о теории Галуа, приспособленное к специальным полям».

В 1960-х годах, занимаясь с одаренными школьниками в Колмогоровском интернате, Владимир Игоревич доказал, что достаточно общая алгебраическая функция степени не меньше 5 от одной переменной не представима в радикалах. Он нашел чисто топологическое доказательство, не апеллирующее к теории Галуа, непредставимости в радикалах алгебраических функций с неразрешимой группой монодромии (ср. § 2). Арнольд прочел курс лекций о своем доказательстве в Колмогоровском интернате. Позднее этот курс был значительно переработан и опубликован В. Б. Алексеевым [2]. Согласно Арнольду, топологическое доказательство неразрешимости какой-либо задачи, как правило, влечет за собой новые следствия. Например, из топологического доказательства непредставимости в радикалах алгебраической функции с неразрешимой группой монодромии легко вытекает непредставимость такой функции формулой, включающей в себя не только радикалы, но и любые целые функции; см. [38].

В 60-е годы Арнольд получил также результаты о топологической неэлементарности эллиптических функций и интегралов (и других близких вещей), но ничего не опубликовал на эту тему. В декабре 2003 г. Владимир Игоревич написал мне письмо об этом. Следующая теорема, так же как и приведенное выше определение, заимствованы из этого письма.

Теорема 1.3 (Арнольд). *Если мероморфная функция $g: U \to \mathbb{C}P^1$, определенная в комплексной области $U \subset \mathbb{C}$, топологически эквивалентна эллиптической функции $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^1$, то g — эллиптическая функция (возможно, с другими, чем у функции f, периодами).*

Доказательство. Эллиптическая функция f инвариантна относительно группы сдвигов $\mathbb{Z}^2$ $(z \to z + k_1 w_1 + k_2 w_2,\ (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2)$. Поэтому функция g инвариантна относительно группы гомеоморфизмов $\mathbb{Z}^2$ области U. Каждый гомеоморфизм h этой группы на самом деле является биголоморфным отображением области U в себя. Действительно, по теореме об обратной функции из тождества $g(z) \equiv g(h(z))$ вытекает голоморфность отображения h в окрестности каждой точки, не принадлежащей прообразу при отображении h множества критических точек функции g. В точках этого прообраза отображение h голоморфно по теореме об устранимой особенности. По условию область U гомеоморфна $\mathbb{C}$. Следовательно, по теореме Римана область U либо совпадает с $\mathbb{C}$, либо биголоморфно эквивалентна внутренности единичного круга. Область U совпадает с $\mathbb{C}$, так как группа биголоморфных преобразований единичного круга не содержит подгруппы $\mathbb{Z}^2$. Подгруппа $\mathbb{Z}^2$ группы биголоморфных преобразований $\mathbb{C}$, действующая на $\mathbb{C}$ без неподвижных точек, является группой сдвигов $(z \to k_1\tau_1 + k_2\tau_2,\ (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2)$. Поэтому g — эллиптическая функция. □

Как известно, эллиптические функции неэлементарны[1]. Из этого классического результата и доказанной выше теоремы вытекает топологическая неэлементарность эллиптических функций.

Ниже приводится цитата из письма Владимира Игоревича.

«Эти соображения доказывали, мне помнится, топологическую неэлементарность как эллиптических функций, f, так и эллиптических интегралов, f^{-1}, да и многого другого. Причем все это

[1]Неэлементарность эллиптических функций вытекает из обобщения теории Пикара–Вессио, принадлежащего Колчину [21]. Это обобщение применимо не только к линейным, но и к некоторым нелинейным дифференциальным уравнениям, например к уравнению на γ-функцию Вейерштрасса. Группа Галуа дифференциального поля эллиптических функций над полем констант $\mathbb{C}$, очевидно, содержит группу $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$, состоящую из факторгруппы группы сдвигов $f(z) \to f(z+a)$ по подгруппе $\mathbb{Z}^2$ периодов эллиптических функций. Несложно показать, что группа Галуа совпадает с этой группой. Непредставимость эллиптических функций в обобщенных квадратурах, согласно Колчину, вытекает из несуществования у группы $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ нормальной башни подгрупп, каждая факторгруппа относительно которой является или конечной группой, или аддитивной, или мультипликативной группами комплексных чисел.

обобщается и на кривые других родов (с другими накрытиями, или хотя бы с универсальными накрытиями). Не помню, доказал ли я аккуратно, но думаю, что у меня были соображения, почему аналогичные приведенной теореме *многомерные* высказывания должны быть *неверны*: помнится, что *сохранение топологического типа в многомерном случае не гарантирует сохранение алгебраичности.* Само по себе это не препятствует топологической неэлементарности (нехорошести), но препятствует моему доказательству его, доказательству путем сведения к неэлементарности классического (алгебраического) объекта вроде эллиптической функции».

§ 2. Топологическая непредставимость функций в радикалах

В этом параграфе приводится вариант топологического доказательства Арнольда непредставимости функций в радикалах, основанный на заметке [38] и содержащий в зародыше рассуждения одномерной топологической теории Галуа.

Класс функций от одной переменной, представимых в радикалах, можно задать при помощи следующих двух списков.

Список основных функций: комплексные константы $y \equiv C$, независимая переменная $y = x$ и функции $y = x^{1/n}$, где $n > 1$ — любое натуральное число.

Список допустимых операций: арифметические операции и суперпозиции.

Класс функций, представимых в радикалах, — это множество всех функций, которые получаются из основных функций при помощи допустимых операций. В этом параграфе обсуждается следующий

Критерий представимости в радикалах. *Функция представима в радикалах, если и только если она является алгебраической функцией и имеет разрешимую группу монодромии.*

Критерий легко выводится из теории Галуа. Дело в том, что группа монодромии алгебраической функции изоморфна группе Галуа расширения поля рациональных функций, полученного присоединением к этому полю всех ветвей алгебраической функции.

В этом параграфе приводится простое доказательство критерия, независимое от теории Галуа и от остального содержания книги (правда, в п. 2.4 мы используем без доказательства несложную линейную алгебру из главы 2). Пункт 2.1 посвящен (почти очевидной) проверке разрешимости групп монодромии основных функций, представимых в радикалах. В п. 2.2 формулируются нужные нам утверждения о разрешимых группах. В п. 2.4 доказана представимость в радикалах алгебраических функций с разрешимой группой монодромии.

Замечания. 1. Класс функций, представимых в радикалах, определен в п. 2.2 введения немного по-другому. Легко видеть, что это определение эквивалентно определению, приведенному выше.

2. Операции с многозначными функциями в настоящем параграфе, как и в остальной части книги (кроме главы 7), понимаются в смысле п. 2.1 введения.

2.1. Группы монодромии основных функций. Легко вычислить группы монодромии основных функций, представимых в радикалах. *Группы монодромии констант и независимой переменной тривиальны* (т. е. состоят из одного единичного элемента), так как эти функции однозначны.

Утверждение 2.1. *Группа монодромии функции $y=x^{1/n}$ является циклической группой $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Действительно, функция $x^{1/n}$ не имеет точек ветвления в области $\mathbb{C}^*=\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0,\infty\}$, фундаментальная группа которой изоморфна аддитивной группе целых чисел. В группе $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$ в качестве образующей можно выбрать петлю $\gamma(t)=\exp(2\pi i t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Функция $y=x^{1/n}$ имеет n ростков y_k, $0\leqslant k<n$, в точке 1, значения которых в этой точке задаются следующими формулами: $y_k(1)=\exp\frac{2k\pi i}{n}$. Продолжение ростка y_k вдоль кривой γ в точке $\gamma(t)$ принимает значение $\exp\frac{2(k+t)\pi i}{n}$. При обходе по кривой γ параметр t возрастает от 0 до 1. Поэтому при обходе по этой кривой росток y_k переходит в росток y_m, где $m=(k+1) \bmod n$. □

Следствие 2.2. *Группы монодромии основных функций, представимых в радикалах, разрешимы.*

2.2. Разрешимые группы. Сформулируем нужные нам факты о разрешимых группах. Группу G будем называть *разрешимой группой глубины $l\geqslant 0$*, если 1) существует цепочка вложенных подгрупп $G=G_0\supset\ldots\supset G_l=e$, в которой группа G_l совпадает с единичным элементом e и при $i=1, \ldots, l$ группа G_i является нормальным делителем группы G_{i-1}, причем факторгруппа G_{i-1}/G_i коммутативна; 2) не существует цепочки вложенных подгрупп меньшей длины с аналогичными свойствами. Группа называется *разрешимой*, если она является разрешимой глубины l при некотором $l \geqslant 0$.

Положим $[G]^0 = G$. Обозначим через $[G]^1$ коммутатор группы G. Для каждого натурального l по индукции определяется *l-й коммутатор $[G]^l$ группы G* как коммутатор группы $[G]^{l-1}$. Легко проверить следующее утверждение.

Утверждение 2.3. 1. *Для любого натурального l группа $[G]^l$ является нормальным делителем в группе G.* (Более того, любой автоморфизм группы G переводит группу $[G]^l$ в себя.)

2. *Группа G является разрешимой группой глубины $l > 0$, если и только если $[G]^l = e$ и $[G]^{l-1} \neq e$.*

3. *Для любого гомоморфизма $\pi\colon G_1 \to G_2$ группы G_1 в группу G_2 и любого натурального l справедливо включение $[\pi(G_1)]^l \subseteq [G_2]^l$.*

4. *Для любых натуральных чисел l и m и любой группы G справедливо включение $[G]^l \supseteq [G]^{l+m}$.*

2.3. Замкнутость класса алгебраических функций с разрешимой группой монодромии. Легко показать, что класс алгебраических функций замкнут относительно суперпозиций и арифметических операций. Мы не будем останавливаться на доказательстве этого хорошо известного факта. Докажем, что класс алгебраических функций, имеющих разрешимую группу монодромии, тоже замкнут относительно этих операций.

Пусть y — алгебраическая функция комплексной переменной, A — множество ветвления функции y и $U_A = \overline{\mathbb{C}} \setminus A$ — дополнение к множеству ветвления A в сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть $\pi_1(U_A, *)$ — фундаментальная группа области U_A с отмеченной точкой $* \in U_A$.

Утверждение 2.4. 1. *Если группа монодромии алгебраической функции y является разрешимой группой глубины не больше l, то любой росток функции y в точке $*$ не изменяется при продолжении вдоль l-го коммутатора $[\pi_1(U_A, *)]^l$ группы $\pi_1(U_A, *)$.*

2. *Если хотя бы один из ростков функции y в точке $*$ не изменяется при продолжении вдоль l-го коммутатора $[\pi_1(U_A, *)]^l$ группы $\pi_1(U_A, *)$, то группа монодромии алгебраической функции y является разрешимой группой глубины не больше l.*

Доказательство. Утверждение 2.4 автоматически вытекает из утверждения 2.3. Ограничимся следующим замечанием. Группа $[G]^l$ — нормальный делитель фундаментальной группы $G = \pi_1(U_A, *)$ (см. п. 1 утверждения 2.3). Поэтому если хотя бы один росток функции y не меняется при продолжении вдоль кривых из подгруппы $[G]^l$, то продолжение вдоль кривых из этой подгруппы не меняет ни одного ростка функции y. $\square$

Пусть B — любое конечное множество, содержащее множество точек ветвления A функции y, $U_B = \overline{\mathbb{C}} \setminus B$ — дополнение к множеству B в сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ и $*$ — точка в области U_B.

Следствие 2.5. 1. *Если группа монодромии алгебраической функции y является разрешимой группой глубины не больше l, то любой росток функции y в точке $*$ не изменяется при продолжении вдоль l-го коммутатора $[\pi_1(U_B, *)]^l$ группы $\pi_1(U_B, *)$.*

2. *Если хотя бы один из ростков функции y в точке $*$ не изменяется при продолжении вдоль l-ого коммутатора $[\pi_1(U_B, *)]^l$ группы $\pi_1(U_B, *)$, то группа монодромии алгебраической функции y является разрешимой группой глубины не больше l.*

Доказательство. Каждую перестановку ростков функции y, которая получается при обходе по кривой из группы $\pi_1(U_A, *)$, можно получить в результате обхода по кривой из группы $\pi_1(U_B, *)$. Для этого достаточно чуть пошевелить первоначальную кривую и избавиться от ее точек пересечения с множеством $B \setminus (B \cap A)$ (если, разумеется, такие точки пересечения изначально существовали). Поэтому следствие 2.5 и утверждение 2.4, в сущности, не различаются. $\square$

Теорема 2.6. *Класс алгебраических функций с разрешимой группой монодромии замкнут относительно арифметических операций.*

Доказательство. Пусть алгебраические функции y и z имеют множества ветвления A_1 и A_2 и разрешимые группы монодромии M_1 и M_2 глубин l_1 и l_2 соответственно. Пусть $B = A_1 \cup A_2$, $U_B = \overline{\mathbb{C}} \setminus B$ и $*$ — точка в области U_B. Обозначим через m максимум из чисел l_1 и l_2. По следствию 2.5 мероморфное продолжение вдоль кривых из группы $[\pi_1(U_B, *)]^m$ не меняет ростков функций y и z. Поэтому при продолжениях вдоль кривых из этой группы ростки функций $y + z$, $y - z$, $y \times z$ и $y : z$ возвращаются к своим прежним значениям. Значит, по следствию 2.5 группы монодромии этих ростков разрешимы и имеют длины не больше m. $\square$

Теорема 2.7. *Класс алгебраических функций с разрешимой группой монодромии замкнут относительно суперпозиций.*

Прежде чем доказывать теорему 2.7, немного уточним ее. Рассмотрим алгебраические функции y и z. Пусть A_1 и A_2 — множества ветвлений функций y и z, а M_1 и M_2 — группы монодромии этих функций, являющиеся разрешимыми группами глубин l_1 и l_2. Обозначим через $y^{-1}(A_2)$ полный прообраз множества A_2 при многозначном соответствии, порожденном функцией y (т. е. $x \in y^{-1}(A_2)$, если существует росток функции y, значение которого в точке x принадлежит множеству A_2).

Теорема 2.7$'$. *При сделанных выше предположениях суперпозиция $z(y)$ алгебраических функций y и z имеет разрешимую группу монодромии глубины не больше $l_1 + l_2$. Множество ветвления функции $z(y)$ является подмножеством множества $B = A_1 \cup y^{-1}(A_2)$.*

Доказательство. Очевидно, что множество $B = A_1 \cup y^{-1}(A_2)$ содержит все точки ветвления функции $z(y)$. Пусть $U_B = \overline{\mathbb{C}} \setminus B$ и $*$ — точка в области U_B. Положим $U_{A_2} = \overline{\mathbb{C}} \setminus A_2$. Обозначим через G группу $\pi_1(U_B, *)$ и через $[G]^{l_1}$ — ее l_1-й коммутатор.

По следствию 2.5 мероморфное продолжение вдоль кривых из группы $[G]^{l_1}$ не меняет ростков функций y. Это означает, что для каждого ростка y_i функции y в точке $*$ определен гомоморфизм $\tau_i\colon G \to \pi_1(U_{A_2}, \star)$, где $\star = y_i(*)$, сопоставляющий кривой $\gamma\colon [0,1] \to U_B$, $\gamma(0) = \gamma(1) = *$, из группы $G = [\pi_1(U_B, *)]^{l_1}$ кривую $y_i(\gamma)\colon [0,1] \to U_{A_2}$, $y_i(\gamma(0)) = y_i(\gamma(1)) = y_i(*) = \star$, полученную мероморфным продолжением ростка y_i вдоль кривой γ.

По определению мероморфное продолжение вдоль кривых из группы $[\pi_1(U_{A_2}, \star)]^{l_2}$ не меняет ростка z. Следовательно, мероморфное продолжение вдоль кривых из группы $\tau_i^{-1}([\pi_1(U_{A_2}, \star)]^{l_2})$ не меняет ростка $z(y_i)$. По п. 3 утверждения 2.3 группа $\tau^{-1}([\pi_1(U_{A_2}, \star)]^{l_2})$ содержит l_2-й коммутатор группы $[G]^{l_1}$. Поэтому мероморфное продолжение вдоль кривых из группы $[\pi_1(U_B, *)]^{l_1+l_2}$ не меняет ростка суперпозиции $z(y_i)$. Для завершения доказательства теоремы 2.7$'$ осталось воспользоваться следствием 2.5. □

2.4. Алгебраическая функция с разрешимой группой монодромии представима в радикалах. Пусть y — n-значная алгебраическая функция одной переменной, A — множество ее точек ветвления, $U_A = \overline{\mathbb{C}} \setminus A$ и $* \in U_A$ — отмеченная точка. Пусть V — открытый круг с центром в точке $*$, не пересекающийся с множеством A. В круге V существуют n голоморфных ветвей $y_1, \ldots, y_n$ функции y. Поэтому в этом круге мероморфны все функции из поля $R\langle y\rangle = R\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$, полученного присоединением элементов $y_1, \ldots, y_n$ к полю R всех рациональных функций. Каждая функция z из поля $R\langle y\rangle$ мероморфно продолжается вдоль любой кривой γ из фундаментальной группы $\pi_1(U_A, *)$, так как вдоль γ мероморфно продолжаются рациональные функции и все ветви функции y. Мероморфное продолжение вдоль кривой γ сохраняет арифметические операции. Поэтому мероморфное продолжение вдоль кривой γ задает автоморфизм τ_γ поля $R\langle y\rangle$. Автоморфизм τ_γ тождествен, если и только если кривой γ соответствует тривиальное преобразование монодромии M функции y. Функция $z \in R\langle y\rangle$, неподвижная относительно всех автоморфизмов τ_γ, является рациональной функцией. Действительно, z — однозначная алгебраическая функция, следовательно, z — рациональная функция.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.8. *Группа монодромии M функции y действует на поле $R\langle y\rangle$ как группа автоморфизмов. Полем инвариантов относительно этого действия является поле рациональных функций R.*

Соединяя теорему 2.8 с результатами из линейной алгебры, изложенными в § 1 главы 2, получаем такое следствие.

Следствие 2.9. *Алгебраическая функция с разрешимой группой монодромии представима в радикалах.*

Доказательство критерия представимости в радикалах закончено.

§ 3. Об одномерном варианте топологической теории Галуа

Группа монодромии есть не только у алгебраических функций. Она определена для основных элементарных функций и для многих, многих других функций, для которых группа Галуа не имеет смысла. Для доказательства непринадлежности таких функций тому или иному лиувиллевскому классу можно использовать группу монодромии вместо группы Галуа. Этот подход реализуется в топологической теории Галуа. Приведем пример, который показывает, какие трудности приходится преодолевать на этом пути.

Рассмотрим элементарную функцию f, определенную следующей формулой:

$$f(z) = \ln\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ln(z - a_j)\right),$$

где a_j, $j = 1, \ldots, n$, — различные точки на комплексной прямой и λ_j, $j = 1, \ldots, n$, — комплексные константы. Обозначим через Λ аддитивную группу комплексных чисел, порожденную константами $\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_n$. Ясно, что если $n > 2$, то почти для всякого набора констант $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ группа Λ всюду плотна на комплексной прямой.

Утверждение 3.1. *Если группа Λ всюду плотна на комплексной прямой, то элементарная функция f имеет всюду плотное множество точек логарифмического ветвления.*

Доказательство. Пусть g_a — один из ростков функции g, определенной формулой $g(z) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ln(z - a_j)$ в точке a, $a \neq a_j$, $j = 1, \ldots, n$. После обхода точек $a_1, \ldots, a_n$ к ростку g_a прибавится число $2\pi i\lambda$, где λ — элемент группы Λ. Обратно, всякий росток $g_a + 2\pi i\lambda$, где $\lambda \in \Lambda$, получается при аналитическом продолжении ростка g_a вдоль некоторой кривой. Пусть U — малая окрестность точки a и $G: U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, росток которой в точке a есть g_a. Образ V области U при отображении $G: U \to \mathbb{C}$ открыт. Поэтому в области V найдется точка вида $2\pi i\lambda$, где $\lambda \in \Lambda$. Функция $G - 2\pi i\lambda$ является одной из ветвей функции g над областью U, причем множество нулей этой ветви в области U непусто. Поэтому одна из ветвей функции $f = \ln g$ имеет в U точку логарифмического ветвления. $\square$

Несложно проверить, что в условиях утверждения группа монодромии функции f континуальна (это неудивительно: фундаментальная группа $\pi_1(S \setminus A)$, где A — счетное всюду плотное множество на сфере Римана, очевидно, содержит континуум элементов).

Можно показать также, что образ фундаментальной группы дополнения к множеству $A \cup b$, где $b \notin A$ — точка на комплексной прямой, в группе перестановок листов функции f является собственной подгруппой группы монодромии функции f. (То обстоятельство, что удаление одной лишней точки может изменить группу монодромии, несколько усложняет все доказательства.)

Итак, уже простейшие элементарные функции могут иметь всюду плотное множество особых точек и континуальную группу монодромии. Тем не менее, множество особых точек элементарной функции одного переменного не более чем счетно, а ее группа монодромии разрешима. Если функция не удовлетворяет этим ограничениям, то она не может быть элементарной. Существуют аналогичные топологические препятствия к принадлежности функции одного комплексного переменного другим лиувиллевским классам функций.

Переходим к подробному описанию этого геометрического подхода к проблеме разрешимости.

§ 4. Функции с не более чем счетным множеством особых точек

В этом параграфе определяется обширный класс функций одной комплексной переменной, нужный для построения топологической теории Галуа.

4.1. Запрещенные множества. Определим класс функций, внутри которого будут проводиться дальнейшие рассмотрения. Многозначная аналитическая функция одного комплексного переменного называется *$\mathscr{S}$-функцией*, если множество ее особых точек не более чем счетно. Уточним это определение.

Два регулярных ростка f_a и g_b, заданные в точках a и b сферы Римана S^2, называются эквивалентными, если росток g_b получается из ростка f_a регулярным продолжением вдоль некоторой кривой. Каждый росток g_b, эквивалентный ростку f_a, называется также регулярным ростком многозначной аналитической функции f, порожденной ростком f_a.

Точка $b \in S^2$ называется особой для ростка f_a, если существует кривая $\gamma\colon [0,1] \to S^2$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, вдоль которой росток не может быть регулярно продолжен, но для любого t, $0 \leqslant t < 1$, росток регулярно продолжается вдоль укороченной кривой $\gamma\colon [0,t] \to S^2$. Легко видеть, что у эквивалентных ростков множества особых точек совпадают.

Регулярный росток называется *$\mathscr{S}$-ростком*, если множество его особых точек не более чем счетно. Многозначная аналитическая функция называется *$\mathscr{S}$-функцией*, если каждый ее регулярный росток является $\mathscr{S}$-ростком.

Нам понадобится лемма, согласно которой малым шевелением кривую на плоскости можно снять со счетного множества точек.

Лемма 4.1 (о снятии кривой со счетного множества). *Пусть A — не более чем счетное множество точек на плоскости $\mathbb{C}$, $\gamma\colon [0,1]\to\mathbb{C}$ — кривая и φ — непрерывная положительная функция на интервале $0<t<1$. Тогда существует кривая $\hat{\gamma}\colon [0,1]\to\mathbb{C}$, такая что $\hat{\gamma}(t)\notin A$ и $|\gamma(t)-\hat{\gamma}(t)|<\varphi(t)$ при $0<t<1$.*

«Научное» доказательство леммы заключается в следующем. В функциональном пространстве кривых кривые $\bar{\gamma}$, близкие к γ, $|\gamma(t)-\bar{\gamma}(t)|<\varphi(t)$, и не проходящие через одну из точек множества A, образуют открытое плотное множество. Пересечение счетного числа открытых плотных множеств в таких функциональных пространствах не пусто.

Приведем элементарное доказательство леммы (оно почти дословно переносится на более общий случай, когда множество A несчетно, но имеет нулевую длину по Хаусдорфу; ср. § 8). Сначала построим бесконечнозвенную ломаную $\bar{\gamma}$ с вершинами, не принадлежащими A, такую что $|\gamma(t)-\bar{\gamma}(t)|<\frac{1}{2}\varphi(t)$. Такую ломаную можно построить, так как дополнение к множеству A всюду плотно. Покажем, как изменить каждое звено $[p,q]$ ломаной $\bar{\gamma}$, чтобы она не пересекала множества A. Возьмем отрезок $[p,q]$. Пусть m — перпендикуляр к его середине. Рассмотрим двузвенные ломаные $[p,b]$, $[b,q]$, где $b\in m$ и точка b достаточно близка к отрезку. Они пересекаются только по концам p,q и их число континуально. Значит, среди них есть ломаная, не пересекающая множества A. Заменив таким образом каждое звено бесконечнозвенной ломаной, получим искомую кривую.

Кроме множества особых точек удобно рассматривать и другие множества, вне которых функция неограниченно продолжается. Не более чем счетное множество A называется *запрещенным множеством* для регулярного ростка f_a, если росток f_a регулярно продолжается вдоль кривой $\gamma(t)$, $\gamma(0)=a$, пересекающей множество A лишь, может быть, в начальный момент.

Теорема 4.2 (о запрещенном множестве). *Не более чем счетное множество является запрещенным множеством ростка, если и только если оно содержит множество его особых точек. В частности, росток обладает некоторым запрещенным множеством, если и только если он является ростком $\mathcal{S}$-функции.*

Доказательство. Предположим, что существует особая точка b ростка f_a, не лежащая в некотором запрещенном множестве A этого ростка. По определению должна существовать кривая $\gamma\colon [0, 1] \to S^2$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, вдоль которой не существует регулярного продолжения ростка f_a, но вдоль которой росток продолжается до любой точки $t < 1$. Не ограничивая общности, можно считать, что точки a, b и кривая $\gamma(t)$ лежат в конечной части сферы Римана, т. е. $\gamma(t) \neq \infty$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Обозначим через $R(t)$ радиус сходимости рядов $f_{\gamma(t)}$, получающихся при продолжении ростка f_a вдоль кривой $\gamma(t)$. Функция $R(t)$ непрерывна на полуинтервале $[0, 1)$. Согласно лемме существует кривая $\hat\gamma(t)$, $\hat\gamma(0) = a$, $\hat\gamma(1) = b$, такая что $|\gamma(t) - \hat\gamma(t)| < \frac{1}{3}R(t)$ и $\hat\gamma(t) \notin A$ при $t > 0$. Росток f_a по условию должен продолжаться вдоль кривой $\hat\gamma$ до точки 1. Но отсюда легко следует, что росток f_a продолжается вдоль кривой γ. Полученное противоречие доказывает, что множество особых точек ростка f_a содержится во всяком запрещенном множестве этого ростка. Обратное утверждение (счетное множество, содержащее множество особенностей ростка, является запрещенным для ростка) очевидно. □

4.2. Замкнутость класса $\mathscr{S}$-функций. Докажем замкнутость введенного класса функций относительно всех естественных операций.

Теорема 4.3 (о замкнутости класса $\mathscr{S}$-функций). *Класс $\mathscr{S}$ всех $\mathscr{S}$-функций замкнут относительно следующих операций*:

1) *дифференцирования, т. е. если $f \in \mathscr{S}$, то $f' \in \mathscr{S}$*;

2) *интегрирования, т. е. если $f \in \mathscr{S}$ и $g' = f$, то $g \in \mathscr{S}$*;

3) *суперпозиции, т. е. если $g, f \in \mathscr{S}$, то $g \circ f \in \mathscr{S}$*;

4) *мероморфных операций, т. е. если $F(x_1, \ldots, x_n)$ — мероморфная функция n переменных, $f_i \in \mathscr{S}$, $i = 1, \ldots, n$, и $f = F(f_1, \ldots, f_n)$, то $f \in \mathscr{S}$*;

5) *решения алгебраических уравнений, т. е. если $f_i \in \mathscr{S}$, $i = 1, \ldots, n$, и $f^n + f_1 f^{n-1} + \ldots + f_n = 0$, то $f \in \mathscr{S}$*;

6) *решения линейных дифференциальных уравнений, т. е. если $f_i \in \mathscr{S}$, $i = 1, \ldots, n$, и $f^{(n)} + f_1 f^{(n-1)} + \ldots + f_n = 0$, то $f \in \mathscr{S}$.*

Доказательство. 1, 2. Пусть f_a, $a \neq \infty$, — росток $\mathscr{S}$-функции с множеством особых точек A. Если росток f_a регулярно продолжается вдоль некоторой кривой γ, лежащей в конечной части сферы Римана, то интеграл и производная этого ростка регулярно продолжаются вдоль кривой γ. Поэтому в качестве запрещенного множества для интеграла и производной ростка f_a достаточно взять множество $A\cup\{\infty\}$.

3. Пусть f_a и g_b — ростки $\mathscr{S}$-функций с множествами особых точек A и B и $f_a(a)=b$. Обозначим через $f^{-1}(B)$ полный прообраз множества B при многозначном соответствии, порожденном ростком f_a. Иными словами, $x\in f^{-1}(B)$, если и только если существует росток ψ_x, эквивалентный ростку f_a и такой, что $\psi(x)\in B$. Множество $f^{-1}(B)$ не более чем счетно. В качестве запрещенного множества ростка $g_b\circ f_a$ достаточно взять множество $A\cup f^{-1}(B)$.

4. Пусть f_{ia} — ростки $\mathscr{S}$-функций, A_i — множества их особых точек и F — мероморфная функция n переменных. Мы предполагаем, что ростки f_{ia} и функция F таковы, что росток $f_a=F(f_{1a},\ldots,f_{na})$ является вполне определенным мероморфным ростком. Заменив, если надо, точку a близкой точкой, можно считать, что росток f_a регулярен. Если кривая $\gamma(t)$ не пересекает множество $A=\bigcup A_i$ при $t>0$, то росток f_a мероморфно продолжается вдоль этой кривой. Пусть B — проекция на сферу Римана множества полюсов функции f, порожденной ростком f_a. В качестве запрещенного множества ростка достаточно взять множество $A\cup B$.

5. Пусть f_{ia} — ростки $\mathscr{S}$-функций, A_i — множества их особых точек и f_a — регулярный росток, удовлетворяющий равенству

$$f_a^n+f_{1a}\cdot f_a^{n-1}+\ldots+f_{na}=0.$$

Если кривая $\gamma(t)$ не пересекает множества $A=\bigcup A_i$ при $t>0$, то существует продолжение ростка f_a вдоль этой кривой, содержащее, вообще говоря, мероморфные и алгебраические элементы. Пусть B — проекция множества полюсов функции f и точек разветвления ее римановой поверхности на сферу Римана S^2. В качестве запрещенного множества для ростка f_a достаточно взять множество $A\cup B$.

6. Если коэффициенты уравнения

$$f_a^{(n)}+f_{1a}\cdot f_a^{(n-1)}+\ldots+f_{na}=0$$

регулярно продолжаются вдоль некоторой кривой γ, лежащей в конечной части сферы Римана, то любое решение f_a этого уравнения также регулярно продолжается вдоль кривой γ. Поэтому в качестве запрещенного множества ростка f_a достаточно взять множество $A=\bigcup A_i\cup\{\infty\}$, где A_i — множества особых точек ростков f_{ia}. $\square$

Замечание. Арифметические операции и потенцирование являются примерами мероморфных операций, поэтому *класс $\mathscr{S}$-функ-*

ций замкнут относительно арифметических операций и потенцирования.

Следствие 4.4. *Если многозначную функцию f можно получить из однозначных $\mathcal{S}$-функций с помощью интегрирования, дифференцирования, мероморфных операций, суперпозиций, решения алгебраических уравнений и линейных дифференциальных уравнений, то функция f имеет не более чем счетное число особых точек. В частности, функцию, имеющую несчетное число особых точек, нельзя представить в обобщенных квадратурах.*

§ 5. Группа монодромии

В этом параграфе обсуждаются различные понятия, связанные с группой монодромии.

5.1. Группа монодромии с запрещенным множеством. Группа монодромии $\mathcal{S}$-функции f с запрещенным множеством A — это группа всех перестановок листов функции f, которые происходят при обходе точек множества A. Дадим теперь точное определение.

Пусть F_a — множество всех ростков $\mathcal{S}$-функции f в точке a, не лежащей в некотором запрещенном множестве A. Возьмем замкнутую кривую γ в $S^2 \setminus A$ с началом в точке a. Продолжение каждого ростка из множества F_a вдоль кривой γ приводит к ростку из множества F_a.

Итак, каждой кривой γ соответствует отображение множества F_a в себя, причем гомотопным в $S^2 \setminus A$ кривым отвечают одинаковые отображения. Произведению кривых отвечает произведение отображений. Возникает гомоморфизм τ фундаментальной группы множества $S^2 \setminus A$ в группу $S(F_a)$ взаимно однозначных преобразований множества F_a. Этот гомоморфизм будем называть *гомоморфизмом A-монодромии*. Группой монодромии $\mathcal{S}$-функции f с запрещенным множеством A или, короче, *группой A-монодромии* называется образ фундаментальной группы $\pi_1(S^2 \setminus A, a)$ в группе $S(F_a)$ при гомоморфизме τ.

Утверждение 5.1. 1. *Группа A-монодромии $\mathcal{S}$-функции не зависит от выбора точки a.*

2. *Группа A-монодромии $\mathcal{S}$-функции f транзитивно действует на листах функции f.*

Оба утверждения просто доказываются при помощи леммы 4.1. Остановимся, например, на доказательстве второго из них.

Доказательство. Пусть f_{1a} и f_{2a} — некоторые ростки функции f в точке a. Так как ростки f_{1a} и f_{2a} эквивалентны, то существует кривая γ, при продолжении вдоль которой ростка f_{1a} получается росток f_{2a}. Согласно лемме 4.1 существует сколь угодно близкая кривая $\hat{\gamma}$, не пересекающая множество A. Если кривая $\hat{\gamma}$ достаточно близка к кривой γ, то соответствующая ей перестановка листов переводит росток f_{1a} в росток f_{2a}. □

5.2. Замкнутая группа монодромии. Зависимость группы A-монодромии от выбора множества A заставляет ввести тихоновскую топологию в группе перестановок листов. Оказывается, что замыкание группы A-монодромии уже не зависит от множества A.

Группу $S(M)$ взаимно однозначных преобразований множества M мы будем рассматривать вместе со следующей топологией. Для каждого конечного множества $L \subset M$ определим окрестность U_L тождественного преобразования как совокупность преобразований p, таких что $p(l) = l$ при $l \in L$. Базис окрестностей тождественного преобразования определяется как множество окрестностей вида U_L, где L пробегает все конечные подмножества в M.

Лемма 5.2 (о замыкании группы монодромии). *Замыкание группы монодромии $\mathscr{S}$-функции f с запрещенным множеством A в группе $S(F)$ всех перестановок листов функции f не зависит от выбора запрещенного множества A.*

Доказательство. Пусть A_1 и A_2 — два запрещенных множества функции f и F_a — совокупность листов функции f в точке a, не принадлежащей множеству $A_1 \cup A_2$. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq S(F_a)$ — группы монодромии функции f с этими запрещенными множествами. Достаточно показать, что для каждой перестановки $\mu_1 \in \Gamma_1$ и для каждого конечного множества $L \subseteq F_a$ существует перестановка $\mu_2 \in \Gamma_2$, такая что $\mu_1|_L = \mu_2|_L$. Пусть кривая $\gamma \in \pi_1(S^2 \setminus A_1, a)$ задает перестановку μ_1. Так как множество L конечно, всякая кривая $\hat{\gamma} \in \pi_1(S^2 \setminus A_1, a)$, достаточно близкая к кривой γ, задает перестановку $\hat{\mu}_1$, совпадающую с перестановкой μ_1 на множестве L, $\mu_1|_L = \hat{\mu}_1|_L$. По лемме из п. 4.1 такую кривую $\hat{\gamma}$ можно выбрать так, чтобы она не пересекала множества A_2. Перестановка $\hat{\mu}_1$ в этом случае будет лежать в группе Γ_2. □

Лемма делает корректным следующее определение: *замкнутой группой монодромии* $\mathscr{S}$-функции f называется замыкание в группе $S(F)$ группы монодромии функции с некоторым запрещенным множеством A.

5.3. Транзитивное действие группы на множестве и монодромная пара $\mathscr{S}$-функции. Группа монодромии функции f — это не просто абстрактная группа, но транзитивная группа перестановок листов этой функции. В этом пункте напоминается алгебраическое описание транзитивных действий группы на множествах.

Действием группы Γ на множестве M называется гомоморфизм τ группы Γ в группу $S(M)$. Два действия $\tau_1\colon \Gamma \to S(M_1)$ и $\tau_2\colon \Gamma \to \to S(M_2)$ называются эквивалентными, если существует такое взаимно однозначное отображение $q\colon M_1 \to M_2$, что $\bar{q} \circ \tau_1 = \tau_2$, где $\bar{q}\colon S(M_1) \to S(M_2)$ — изоморфизм, индуцированный отображением q.

Стационарной подгруппой Γ_a точки $a \in M$ при действии τ называется подгруппа, состоящая из всех элементов $\mu \in \Gamma$, таких что $\tau\mu(a) = a$. Действие τ называется *транзитивным*, если для любых точек $a, b \in M$ существует $\mu \in \Gamma$, такое что $\tau\mu(a) = b$. Очевидно следующее утверждение.

Утверждение 5.3. 1. *Действие τ группы Γ транзитивно, если и только если стационарные подгруппы любых двух точек $a, b \in M$ сопряжены. Образ группы Γ при транзитивном действии τ изоморфен факторгруппе* $\Gamma / \bigcap\limits_{\mu\in\Gamma} \mu\Gamma_a\mu^{-1}$.

2. *Существует и при этом единственно с точностью до эквивалентности транзитивное действие группы Γ с фиксированной стационарной подгруппой некоторой точки.*

Итак, транзитивные действия группы Γ описываются парами групп. Пару групп $[\Gamma, \Gamma_a]$, где Γ_a — стационарная подгруппа некоторой точки a при транзитивном действии τ группы Γ, будем называть *монодромной парой точки a* относительно действия τ. Группу $\tau(\Gamma) \approx \Gamma / \bigcap\limits_{\mu\in\Gamma} \mu\Gamma_a\mu^{-1}$ будем называть группой монодромии пары $[\Gamma, \Gamma_a]$.

Гомоморфизм A-монодромии τ задает транзитивное действие фундаментальной группы $\pi_1(S^2 \setminus A)$ в множестве F_a листов функции f в точке a.

Монодромную пару ростка f_a относительно действия τ будем называть *монодромной парой ростка* f_a *с запрещенным множеством* A. Монодромную пару ростка f_a при действии замкнутой группой монодромии будем называть *замкнутой монодромной парой ростка* f_a. У разных ростков $\mathscr{S}$-функции f монодромные пары с запрещенным множеством A изоморфны, поэтому имеет смысл говорить о монодромной паре с запрещенным множеством A и замкнутой монодромной паре $\mathscr{S}$-функции f. Замкнутую монодромную пару $\mathscr{S}$-функции f будем обозначать $[f]$.

5.4. Почти нормальные функции. Пару групп $[\Gamma, \Gamma_0]$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, будем называть *почти нормальной парой*, если существует конечное множество $P \subset \Gamma$, такое что

$$\bigcap_{\mu \in \Gamma} \mu \Gamma_0 \mu^{-1} = \bigcap_{\mu \in P} \mu \Gamma_0 \mu^{-1}.$$

Лемма 5.4 (о дискретном действии). *Образ* $\tau(\Gamma)$ *группы* Γ *при транзитивном действии* $\tau : \Gamma \to S(M)$ *является дискретной подгруппой в* $S(M)$, *если и только если монодромная пара* $[\Gamma, \Gamma_0]$ *некоторого элемента* $x_0 \in M$ *почти нормальна.*

Доказательство. Пусть группа $\tau(\Gamma)$ дискретна. Обозначим через $\bar{P}$ такое конечное подмножество множества M, что окрестность тождественного преобразования $U_{\bar{P}}$ не содержит преобразований группы $\tau(\Gamma)$, отличных от тождественного. Это означает, что пересечению $\bigcap_{x \in \bar{P}} \Gamma_x$ стационарных подгрупп точек $x \in \bar{P}$ отвечает тривиальное действие на множестве M, т. е. $\bigcap_{x \in \bar{P}} \Gamma_x \subseteq \bigcap_{\mu \in \Gamma} \mu \Gamma_0 \mu^{-1}$. Группы Γ_x сопряжены группе Γ_0, поэтому можно выбрать такое конечное множество $P \subset \Gamma$, что $\bigcap_{\mu \in P} \mu \Gamma_0 \mu^{-1} = \bigcap_{\mu \in \Gamma} \mu \Gamma_0 \mu^{-1}$. Обратное утверждение доказывается аналогично. $\square$

Будем называть $\mathscr{S}$-функцию f *почти нормальной*, если ее группа монодромии дискретна. Из леммы вытекает, что функция f почти нормальна, если и только если почти нормальна ее замкнутая монодромная пара $[f]$.

Дифференциальной рациональной функцией от нескольких функций называется рациональная функция от этих функций и их производных.

Лемма 5.5 (о конечно порожденных функциях). *Пусть каждый росток $\mathscr{S}$-функции f в точке a является дифференциальной рациональной функцией от конечного числа фиксированных ростков функции f в точке a. Тогда функция f почти нормальна.*

Действительно, если при продолжении вдоль замкнутой кривой не изменяются фиксированные ростки функции, то не меняются и дифференциальные рациональные функции от них.

Из леммы о конечно порожденных функциях вытекает, что любое решение линейного дифференциального уравнения с рациональными коэффициентами является почти нормальной функцией. То же самое верно и для многих других функций, естественно встречающихся в дифференциальной алгебре.

5.5. Классы пар групп. В § 6 мы опишем, как изменяются замкнутые монодромные пары функций при суперпозициях, интегрированиях, дифференцированиях и т. д. Для этого нам понадобится ввести некоторые понятия, связанные с парами групп.

Парой групп мы всегда будем называть пару, состоящую из группы и некоторой ее подгруппы. Будем отождествлять группу с парой групп, состоящей из этой группы и ее единичной подгруппы.

Определение. Совокупность $\mathscr{L}$ пар групп будем называть *почти полным классом пар групп*, если

1) для каждой пары групп $[\Gamma, \Gamma_0] \in \mathscr{L}$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, и любого гомоморфизма $\tau: \Gamma \to G$, где G — некоторая группа, пара групп $[\tau\Gamma, \tau\Gamma_0]$ также содержится в $\mathscr{L}$,

2) для каждой пары групп $[\Gamma, \Gamma_0] \in \mathscr{L}$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, и любого гомоморфизма $\tau: G \to \Gamma$, где G — некоторая группа, пара групп $[\tau^{-1}\Gamma, \tau^{-1}\Gamma_0]$ также содержится в $\mathscr{L}$,

3) для каждой пары групп $[\Gamma, \Gamma_0] \in \mathscr{L}$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, и группы G, наделенной T_2-топологией и содержащей группу Γ, $\Gamma \subseteq G$, пара групп $[\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}_0]$ также содержится в $\mathscr{L}$, где $\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}_0$ — замыкания групп Γ, Γ_0 в группе G.

Определение. Почти полный класс пар групп будем называть *полным классом пар групп $\mathscr{M}$*, если

1) для каждой пары групп $[\Gamma, \Gamma_0] \in \mathscr{M}$ и группы $\Gamma_1, \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma$, пара групп $[\Gamma, \Gamma_1]$ также содержится в $\mathscr{M}$,

2) для каждых двух пар групп $[\Gamma, \Gamma_1], [\Gamma_1, \Gamma_2] \in \mathscr{M}$ пара групп $[\Gamma, \Gamma_2]$ также содержится в $\mathscr{M}$.

Минимальные почти полный и *полный классы пар групп, содержащие фиксированное множество пар групп* $\mathscr{B}$, будем обозначать соответственно $\mathscr{L}\langle\mathscr{B}\rangle$ и $\mathscr{M}\langle\mathscr{B}\rangle$.

Лемма 5.6. 1. *Если группа монодромии пары* $[\Gamma, \Gamma_0]$ *содержится в некотором полном классе пар* $\mathscr{M}$, *то пара* $[\Gamma, \Gamma_0]$ *также содержится в* $\mathscr{M}$.

2. *Если почти нормальная пара* $[\Gamma, \Gamma_0]$ *содержится в некотором полном классе пар* $\mathscr{M}$, *то ее группа монодромии также содержится в* $\mathscr{M}$.

Остановимся на доказательстве второго утверждения. Пусть Γ_i, $i = 1, \ldots, n$, — конечное число подгрупп, сопряженных с Γ_0, таких что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \Gamma_i = \bigcap\limits_{\mu\in\Gamma} \mu\Gamma_0\mu^{-1}$. Пары $[\Gamma, \Gamma_i]$ изоморфны паре $[\Gamma, \Gamma_0]$, поэтому $[\Gamma, \Gamma_i] \in \mathscr{M}$. Пусть $\tau\colon \Gamma_2 \to \Gamma$ — гомоморфизм вложения, тогда $\tau^{-1}(\Gamma_1) = \Gamma_2 \cap \Gamma_1$, поэтому $[\Gamma_2, \Gamma_2 \cap \Gamma_1] \in \mathscr{M}$. Класс $\mathscr{M}$ содержит пары $[\Gamma, \Gamma_2]$ и $[\Gamma_2, \Gamma_2 \cap \Gamma_1]$, следовательно, $[\Gamma, \Gamma_1 \cap \Gamma_2] \in \mathscr{M}$. Продолжая это рассуждение, получим, что класс $\mathscr{M}$ содержит пару $\left[\Gamma, \bigcap\limits_{i=1}^{n} \Gamma_i\right]$ и вместе с ней группу $\Gamma / \bigcap\limits_{\mu\in\Gamma} \mu\Gamma_0\mu^{-1}$.

Утверждение 5.7 (о классе $\mathscr{L}\langle[f]\rangle$). *Почти полный класс пар* $\mathscr{L}$ *содержит замкнутую монодромную пару* $[f]$ $\mathscr{S}$-*функции* f, *если и только если этот класс содержит монодромную пару функции* f *с запрещенным множеством* A.

Доказательство. Пусть $[\Gamma, \Gamma_0]$ — монодромная пара функции f с запрещенным множеством A. Тогда $[f] = [\overline{\Gamma}, \overline{\Gamma}_0]$. Поэтому всякий почти полный класс $\mathscr{L}$, содержащий пару $[\Gamma, \Gamma_0]$, содержит и пару $[f]$. Обратно, если $[\overline{\Gamma}, \overline{\Gamma}_0]$ содержится в классе $\mathscr{L}$, то и $[\Gamma, \Gamma_0] \in \mathscr{L}$. Действительно, топология в группе перестановок устроена таким образом, что $\Gamma_0 = \Gamma \cap \overline{\Gamma}_0$. Поэтому пара $[\Gamma, \Gamma_0]$ является прообразом пары $[\overline{\Gamma}, \overline{\Gamma}_0]$ при вложении группы Γ в ее замыкание. □

§ 6. Основная теорема

Здесь формулируется и доказывается основная теорема топологической теории Галуа.

Основная теорема 6.1. *Класс* $\mathscr{S}$-*функций* $\widehat{\mathscr{M}}$, *состоящий из* $\mathscr{S}$-*функций, замкнутые монодромные пары которых лежит в неко-*

тором полном классе пар $\mathscr{M}$, замкнут относительно дифференцирования, суперпозиций и мероморфных операций. Если, кроме того, класс $\mathscr{M}$ содержит

1) *группу $\mathbb{C}$ комплексных чисел по сложению, то класс $\widehat{\mathscr{M}}$ замкнут относительно интегрирования,*

2) *группу $S(k)$ перестановок k элементов, то класс $\widehat{\mathscr{M}}$ замкнут относительно решения алгебраических уравнений степени не выше k.*

Доказательство основной теоремы состоит из следующих лемм.

Лемма 6.2 (о производной). *Для всякой $\mathscr{S}$-функции f справедливо включение $[f'] \in \mathscr{M}\langle [f] \rangle$.*

Доказательство. Пусть A — множество особых точек $\mathscr{S}$-функции f и f_a — росток функции f в неособой точке a. Обозначим через Γ фундаментальную группу $\pi_1(S^2 \setminus A, a)$, а через Γ_1 и Γ_2 — стационарные группы ростков f_a и f_a'. Группа Γ_1 содержится в группе Γ_2. Действительно, при продолжении вдоль кривой $\gamma \in \Gamma_1$ не изменяется росток f_a, а значит, не меняется и его производная. Из определения полного класса пар следует, что $[\Gamma, \Gamma_2] \in \mathscr{M}\langle [\Gamma, \Gamma_1] \rangle$. Воспользовавшись утверждением 5.7, получим, что $[f'] \in \mathscr{M}\langle [f] \rangle$. □

Лемма 6.3 (о суперпозиции). *Для всяких $\mathscr{S}$-функций f и g справедливо включение $[g \circ f] \in \mathscr{M}\langle [f], [g] \rangle$.*

Доказательство. Пусть A и B — множества особых точек функций f и g. Пусть $f^{-1}(B)$ — прообраз множества B при многозначном соответствии, порожденном многозначной функцией f. Положим $Q = A \cup f^{-1}(B)$. Пусть f_a — некоторый росток функции f в точке $a \notin Q$ и g_b — некоторый росток функции g в точке $b = f(a)$. Множество Q будет запрещенным для ростка $g_b \circ f_a$. Обозначим через Γ фундаментальную группу $\pi_1(S^2 \setminus Q, a)$, через Γ_1 и Γ_2 — стационарные подгруппы ростков f_a и $g_b \circ f_a$. Обозначим через G фундаментальную группу $\pi_1(S^2 \setminus B, b)$, а через G_0 — стационарную группу ростка g_b.

Определим гомоморфизм $\tau : \Gamma_1 \to G$. Каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ поставим в соответствие кривую $\tau \circ \gamma(t) = f(\gamma(t))$, где $f_{\gamma(t)}$ — росток, полученный при продолжении ростка f_a вдоль кривой γ до точки t. Кривые $\tau \circ \gamma$ будут замкнуты, так как при продолжении вдоль кривых из Γ_1 росток f_a не изменяется. При гомотопии кривой γ в множестве $S^2 \setminus Q$ будет происходить гомотопия кривой $\tau \circ \gamma$ в множестве $S^2 \setminus B$, так как $f^{-1}(B) \subseteq Q$. Следовательно, гомоморфизм определен корректно.

Росток $g_b \circ f_a$ не будет меняться при продолжении вдоль кривых из группы $\tau^{-1}(G_0)$, или, другими словами, $\tau^{-1}(G_0) \subseteq \Gamma_2$. Отсюда и вытекает лемма. Действительно, мы получаем включения $\Gamma \supseteq \supseteq \Gamma_2 \supseteq \tau^{-1}(G_0) \subseteq \tau^{-1}(G) = \Gamma_1 \subseteq \Gamma$, из которых следует, что $[\Gamma, \Gamma_2] \in \in \mathscr{M}\langle [G, G_0], [\Gamma, \Gamma_1]\rangle$. Воспользовавшись утверждением 5.7, получим, что $[g \circ f] \in \mathscr{M}\langle [f], [g]\rangle$. □

Лемма 6.4 (об интеграле). *Для всякой $\mathscr{S}$-функции f справедливо включение $\left[\int f(x)\,dx\right] \in \mathscr{M}\langle [f], \mathbb{C}\rangle$, где $\mathbb{C}$ — группа комплексных чисел по сложению.*

Доказательство. Пусть A — множество особых точек функции f и $Q = A \cup \{\infty\}$. Пусть f_a — некоторый росток функции f в точке $a \notin Q$ и g_a — росток функции $\int f(x)\,dx$ в этой точке, $g_a' = f_a$. В качестве запрещенного множества для ростков f_a и g_a можно взять множество Q. Обозначим через Γ фундаментальную группу $\pi_1(S^2 \setminus Q, a)$, через Γ_1 и Γ_2 — стационарные подгруппы ростков f_a и g_a.

Определим гомоморфизм $\tau : \Gamma_1 \to \mathbb{C}$. Каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ поставим в соответствие число $\int_\gamma f(\gamma(t))\,dx$, где $f_{\gamma(t)}$ — росток, полученный продолжением ростка f_a вдоль кривой γ до точки t, и $x = \gamma(t)$. Стационарная подгруппа Γ_2 ростка g_a совпадает с ядром гомоморфизма τ, откуда следует, что $[\Gamma, \Gamma_2] \in \mathscr{M}\langle [\Gamma, \Gamma_1], \mathbb{C}\rangle$. Воспользовавшись утверждением 5.7, получим, что $\left[\int f(x)\,dx\right] \in \mathscr{M}\langle [f], \mathbb{C}\rangle$. □

В дальнейшем будет удобно пользоваться векторными функциями. На векторные функции непосредственно переносятся определения запрещенного множества, $\mathscr{S}$-функции, группы монодромии.

Лемма 6.5 (о векторной функции). *Для всякой векторной $\mathscr{S}$-функции $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ справедливо равенство*

$$\mathscr{M}\langle [\boldsymbol{f}]\rangle = \mathscr{M}\langle [f_1], \ldots, [f_n]\rangle.$$

Доказательство. Пусть A_i — множества особых точек функций f_i. Множеством особых точек векторной функции $\boldsymbol{f}$ является множество $Q = \bigcup A_i$. Пусть $\boldsymbol{f}_a = (f_{1a}, \ldots, f_{na})$ — некоторый росток векторной функции $\boldsymbol{f}$ в точке $a \notin Q$. Обозначим через Γ фундаментальную группу $\pi_1(S^2 \setminus Q, a)$, через Γ_i — стационарные группы ростков f_{ia} и через Γ_0 — стационарную группу векторного ростка $\boldsymbol{f}_a$. Стационарная подгруппа Γ_0 есть в точности $\bigcap_{i=1}^{n} \Gamma_i$, откуда следует, что

$$\mathscr{M}\langle [\Gamma, \Gamma_0]\rangle = \mathscr{M}\langle [\Gamma, \Gamma_1], \ldots, [\Gamma, \Gamma_n]\rangle.$$

Воспользовавшись утверждением 5.7, получим, что

$$\mathscr{M}\langle[\boldsymbol{f}]\rangle=\mathscr{M}\langle[f_1],\ldots,[f_n]\rangle. \qquad \square$$

Лемма 6.6 (о мероморфной операции). *Для всякой векторной $\mathscr{S}$-функции $\boldsymbol{f}=(f_1,\ldots,f_n)$ и мероморфной функции $F(x_1,\ldots,x_n)$, такой что функция $F\circ\boldsymbol{f}$ определена, справедливо включение $[F\circ\boldsymbol{f}]\in\in\mathscr{M}\langle[\boldsymbol{f}]\rangle$.*

Доказательство. Пусть A — множество особых точек функции $\boldsymbol{f}$ и B — проекция множества полюсов функции $F\circ\boldsymbol{f}$ на сферу Римана. В качестве запрещенного множества функций $F\circ\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{f}$ можно взять множество $Q=A\cup B$. Пусть $\boldsymbol{f}_a$ — некоторый росток функции $\boldsymbol{f}$ в точке a, $a\notin Q$. Обозначим через Γ фундаментальную группу $\pi_1(S^2\setminus Q,a)$, через Γ_1 и Γ_2 — стационарные группы ростков $\boldsymbol{f}_a$ и $F\circ\boldsymbol{f}_a$. Группа Γ_2 содержится в группе Γ_1. Действительно, при продолжении вдоль кривой $\gamma\in\Gamma_1$ не изменяется векторная функция, а значит, не меняется мероморфная функция от нее. Из включения $\Gamma_2\subseteq\Gamma_1$ следует, что $[\Gamma,\Gamma_2]\in\mathscr{M}\langle[\Gamma,\Gamma_1]\rangle$. Воспользовавшись утверждением 5.7, получим, что

$$[F\circ\boldsymbol{f}]\in\mathscr{M}\langle[\boldsymbol{f}]\rangle. \qquad \square$$

Лемма 6.7 (об алгебраической функции). *Для всякой векторной $\mathscr{S}$-функции $\boldsymbol{f}=(f_1,\ldots,f_n)$ и алгебраической функции y от нее, определенной равенством*

$$y^k+f_1y^{k-1}+\ldots+f_k=0, \tag{17}$$

справедливо включение $[y]\in\mathscr{M}\langle[f],S(k)\rangle$, где $S(k)$ — группа перестановок k элементов.

Доказательство. Пусть A — множество особых точек функции $\boldsymbol{f}$ и B — проекция множества алгебраических точек ветвления функции y на сферу Римана. В качестве запрещенного множества функций y и $\boldsymbol{f}$ можно взять множество $Q=A\cup B$. Пусть y_a и $\boldsymbol{f}_a$ — некоторые ростки функций y и $\boldsymbol{f}$ в точке $a\notin Q$, связанные равенством

$$y_a^k+f_{1a}y_a^{k-1}+\ldots+f_{ka}=0.$$

Обозначим через Γ фундаментальную группу $\pi_1(S^2\setminus Q,a)$, а через Γ_1 и Γ_2 — стационарные подгруппы ростков $\boldsymbol{f}_a$ и y_a. При продолжении вдоль кривой $\gamma\in\Gamma_1$ коэффициенты уравнения (17) не меняются, следовательно, при продолжении вдоль кривой γ корни уравнения

(17) переставляются. Возникает гомоморфизм τ группы Γ_1 в группу $S(k)$, $\tau\colon \Gamma_1 \to S(k)$. Группа Γ_2 содержится в ядре гомоморфизма τ, откуда следует, что $[\Gamma, \Gamma_2] \in \mathscr{M}\langle[\Gamma, \Gamma_1], S(k)\rangle$. Воспользовавшись утверждением 5.7, получим, что

$$[y] \in \mathscr{M}\langle[f], S(k)\rangle. \qquad \square$$

Доказательство основной теоремы закончено.

§ 7. Групповые препятствия к представимости в квадратурах

В этом параграфе вычисляются классы пар групп, встречающиеся в основной теореме, и формулируются необходимые условия представимости функций в квадратурах, k-квадратурах и обобщенных квадратурах.

7.1. Вычисление некоторых классов пар групп. Основная теорема делает актуальной задачу описания наименьшего класса пар групп, содержащего группу $\mathbb{C}$ комплексных чисел по сложению, и наименьших пар классов пар групп, содержащих соответственно группу $\mathbb{C}$ и все конечные группы, а также группу $\mathbb{C}$ и группу $S(k)$. В настоящем пункте мы приводим решение этих задач.

Утверждение 7.1. *Наименьший полный класс пар $\mathscr{M}\langle\mathscr{L}_\alpha\rangle$, содержащий заданные почти полные классы пар $\mathscr{L}_\alpha$, состоит из пар групп $[\Gamma, \Gamma_0]$, для которых существует цепочка подгрупп $\Gamma = \Gamma_1 \supseteq \ldots \ldots \supseteq \Gamma_m \subseteq \Gamma_0$, такая что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, пара групп $[\Gamma_i, \Gamma_{i+1}]$ содержится в некотором почти полном классе $\mathscr{L}_{\alpha(i)}$.*

Для доказательства достаточно проверить, что пары групп $[\Gamma, \Gamma_0]$, удовлетворяющие условию утверждения, во-первых, содержатся в полном классе $\mathscr{M}\langle\mathscr{L}_\alpha\rangle$ и, во-вторых, образуют полный класс пар. И то и другое непосредственно выводится из определений.

Просто проверить также следующие утверждения.

Утверждение 7.2. *Совокупность пар групп $[\Gamma, \Gamma_0]$, где Γ_0 есть нормальный делитель группы Γ и группа Γ/Γ_0 коммутативна, образует наименьший почти полный класс пар $\mathscr{L}\langle\mathscr{A}\rangle$, содержащий класс $\mathscr{A}$ всех абелевых групп.*

Утверждение 7.3. *Совокупность пар групп $[\Gamma, \Gamma_0]$, где Γ_0 есть нормальный делитель группы Γ и группа Γ/Γ_0 конечна, образует* *наименьший почти полный класс пар $\mathscr{L}\langle\mathscr{K}\rangle$, содержащий класс $\mathscr{K}$ всех конечных групп.*

Утверждение 7.4. *Совокупность пар групп $[\Gamma, \Gamma_0]$, для которых $\operatorname{ind}(\Gamma, \Gamma_0) \leqslant k$, образует почти полный класс групп.*

Будем обозначать через $\mathscr{L}\langle \operatorname{ind} \leqslant k\rangle$ класс пар групп из утверждения 7.4. Утверждение 7.4 интересно для нас в связи с характеристическим свойством подгрупп группы $S(k)$ из леммы 3.13.

Цепочка подгрупп Γ_i, $i=1, \ldots, m$, $\Gamma=\Gamma_1 \supseteq \ldots \supseteq \Gamma_m \subseteq \Gamma_0$, называется нормальной башней пары групп $[\Gamma, \Gamma_0]$, если группа Γ_{i+1} является нормальным делителем группы Γ_i при каждом $i=1, \ldots, m-1$. Совокупность факторгрупп Γ_i/Γ_{i+1} называется совокупностью делителей относительно нормальной башни.

Теорема 7.5 (о классах пар $\mathscr{M}\langle\mathscr{A}, \mathscr{K}\rangle$, $\mathscr{M}\langle\mathscr{A}, S(k)\rangle$ и $\mathscr{M}\langle\mathscr{A}\rangle$).

1. *Пара групп $[\Gamma, \Gamma_0]$ принадлежит наименьшему полному классу $\mathscr{M}\langle\mathscr{A}, \mathscr{K}\rangle$, содержащему все конечные и коммутативные группы, если и только если она обладает нормальной башней, каждый делитель относительно которой является или конечной, или коммутативной группой.*

2. *Пара групп $[\Gamma, \Gamma_0]$ принадлежит наименьшему полному классу $\mathscr{M}\langle\mathscr{A}, S(k)\rangle$, содержащему группу $S(k)$ и все коммутативные группы, если и только если она обладает нормальной башней, каждый делитель относительно которой является или подгруппой группы $S(k)$, или коммутативной группой.*

3. *Пара групп $[\Gamma, \Gamma_0]$ принадлежит наименьшему классу $\mathscr{M}\langle\mathscr{A}\rangle$, если и только если группа монодромии этой пары разрешима.*

Доказательство. Пункт 1 теоремы вытекает из описания классов $\mathscr{L}\langle\mathscr{A}\rangle$ и $\mathscr{L}\langle\mathscr{K}\rangle$ в утверждениях 7.2 и 7.3 и из утверждения 7.1.

Для доказательства второго пункта рассмотрим наименьший полный класс пар групп, содержащий классы $\mathscr{L}\langle\mathscr{A}\rangle$ и $\mathscr{L}\langle\operatorname{ind} \leqslant k\rangle$. Этот класс состоит из пар групп $[\Gamma, \Gamma_0]$, для которых существует цепочка подгрупп $\Gamma = \Gamma_1 \supseteq \ldots \supseteq \Gamma_m \subseteq \Gamma_0$, такая что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, либо группа Γ_i/Γ_{i+1} коммутативна, либо $\operatorname{ind}(\Gamma_i, \Gamma_{i+1}) \leqslant k$ (см. утверждения 7.3, 7.4 и утверждение 7.1). Описанный класс пар групп содержит группу $S(k)$ (см. лемму 3.13) и все коммутативные группы и является, очевидно, наименьшим полным классом пар, обладающим этими свойствами. Нам осталось переформулировать ответ. Цепочку подгрупп $\Gamma = \Gamma_1 \supseteq \ldots \supseteq \Gamma_m \subseteq \Gamma_0$ последовательно преобразуем в нормальную башню пары $[\Gamma, \Gamma_0]$. Пусть при $j < i$ группа

Γ_{j+1} является нормальным делителем группы Γ_j и $\mathrm{ind}(\Gamma_i, \Gamma_{i+1}) \leqslant k$. Обозначим через $\overline{\Gamma}_{i+1}$ наибольший нормальный делитель группы Γ_i, содержащийся в Γ_{i+1}. Ясно, что факторгруппа $\Gamma_i/\overline{\Gamma}_{i+1}$ является подгруппой группы $S(k)$. Вместо исходной цепочки подгрупп рассмотрим цепочку $\Gamma = G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_m = \Gamma_0$, в которой $G_j = \Gamma_j$ при $j \leqslant i$ и $G_j = \Gamma_j \cap \overline{\Gamma}_{i+1}$ при $j > i$. Продолжая этот процесс (не более чем m раз), мы перейдем от исходной цепочки подгрупп к нормальной башне и получим описание класса $\mathscr{M}\langle \mathscr{A}, S(k)\rangle$ в нужных терминах.

Докажем пункт 3. Согласно утверждениям 7.2 и 7.3 пара групп $[\Gamma, \Gamma_0]$ принадлежит классу $\mathscr{M}\langle \mathscr{A}\rangle$, если и только если существует такая цепочка $\Gamma = \Gamma_1 \supseteq \ldots \supseteq \Gamma_m \subseteq \Gamma_0$, что Γ_i/Γ_{i+1} — коммутативная группа. Рассмотрим цепочку групп $\Gamma = G^1 \supseteq \ldots \supseteq G^m$, в которой группа G^{i+1} при $i = 1, \ldots, m-1$ есть коммутант группы G^i. Всякий автоморфизм группы Γ переводит цепочку групп G^i в себя, поэтому каждая группа G^i является нормальным делителем группы Γ. Индукция по i показывает, что $G^i \subseteq \Gamma_i$ и, в частности, $G^m \subseteq \Gamma_m \subseteq \Gamma_0$. Группа G^m является нормальным делителем группы Γ, и так как $G^m \subseteq \Gamma_0$, то $G^m \subseteq \bigcap\limits_{\mu\in\Gamma} \mu\Gamma_0\mu^{-1}$. В силу определения цепочки G^i группа Γ/G^m разрешима. Группа $\Gamma/\bigcap\limits_{\mu\in\Gamma} \mu\Gamma_0\mu^{-1}$ разрешима как факторгруппа группы Γ/G^m. Обратное утверждение (пара групп с разрешимой группой монодромии лежит в классе $\mathscr{M}\langle \mathscr{A}\rangle$) очевидно. □

Утверждение 7.6. *Каждая не более чем континуальная коммутативная группа* Γ *принадлежит классу* $\mathscr{L}\langle \mathscr{A}\rangle$.

Доказательство. Комплексные числа $\mathbb{C}$ образуют векторное пространство над рациональными числами континуальной размерности. Пусть $\{e_\alpha\}$ — некоторый базис этого пространства. Подгруппа $\widetilde{\mathbb{C}}$ группы $\mathbb{C}$, натянутая на числа $\{e_\alpha\}$, является свободной абелевой группой с континуальным числом образующих. Всякая не более чем континуальная коммутативная группа Γ есть факторгруппа группы $\widetilde{\mathbb{C}}$, и, следовательно, $\Gamma \in \mathscr{L}\langle \mathscr{A}\rangle$. □

Из утверждения 7.6 и результатов вычисления классов $\mathscr{M}\langle \mathscr{A}, \mathscr{K}\rangle$, $\mathscr{M}\langle \mathscr{A}, S(k)\rangle$ и $\mathscr{M}\langle \mathscr{A}\rangle$ следует, что пара групп $[\Gamma, \Gamma_0]$ с не более чем континуальной группой Γ принадлежит классу $\mathscr{M}\langle \mathbb{C}, \mathscr{K}\rangle$, $\mathscr{M}\langle \mathbb{C}, S(k)\rangle$ и $\mathscr{M}\langle \mathbb{C}\rangle$, если и только если она принадлежит соответственно классу $\mathscr{M}\langle \mathscr{A}, \mathscr{K}\rangle$, $\mathscr{M}\langle \mathscr{A}, S(k)\rangle$ и $\mathscr{M}\langle \mathscr{A}\rangle$.

Мы вправе ограничиться этим результатом, так как группа перестановок листов функции не более чем континуальна.

Лемма 7.7. *Свободная некоммутативная группа Λ не лежит в классе $\mathscr{M}\langle\mathscr{A},\mathscr{K}\rangle$.*

Доказательство. Предположим, что $\Lambda\in\mathscr{M}\langle\mathscr{A},\mathscr{K}\rangle$, т. е. Λ обладает нормальной башней $\Lambda=\Gamma_1\supseteq\ldots\supseteq\Gamma_m=e$, каждый делитель относительно которой есть конечная или коммутативная группа. Каждая группа Γ_i свободна как подгруппа свободной группы (см. [22]). Группа $\Gamma_m=e$ коммутативна. Пусть Γ_{i+1} — первая по номеру коммутативная группа. Для любых элементов $a,b\in\Gamma_i$ существует нетривиальное соотношение: если факторгруппа Γ_i/Γ_{i+1} коммутативна, то коммутируют, например, элементы $aba^{-1}b^{-1}$ и $ab^2a^{-1}b^{-2}$; если Γ_i/Γ_{i+1} конечна, то коммутируют некоторые степени a^p,b^p элементов a,b. Следовательно, группа Γ_i имеет не более одной образующей и поэтому коммутативна. Противоречие доказывает, что $\Lambda\notin\mathscr{M}\langle\mathscr{A},\mathscr{K}\rangle$. □

Лемма 7.8. *При $k>4$ симметрическая группа $S(k)$ не лежит в классе $\mathscr{M}\langle\mathbb{C},S(k-1)\rangle$.*

Доказательство. При $k>4$ знакопеременная группа $A(n)$ проста и некоммутативна. Для этой группы, очевидно, не выполняется критерий принадлежности классу $\mathscr{M}\langle\mathbb{C},S(k-1)\rangle$. Следовательно, и симметрическая группа $S(n)$ при $k>4$ не лежит в классе $\mathscr{M}\langle\mathbb{C},S(k-1)\rangle$. □

Лемма 7.9. *Единственной транзитивной группой перестановок k элементов, натянутой на транспозиции, является симметрическая группа $S(k)$.*

Доказательство. Пусть группа Γ есть транзитивная группа перестановок множества M из n элементов, натянутая на транспозиции. Подмножество $M_0\subseteq M$ назовем полным, если всякая его перестановка продолжается до некоторой перестановки множества M из группы Γ. Полные подмножества существуют. Например, два элемента множества M, переставляемые базисной транспозицией, образуют полное подмножество. Возьмем наибольшее по числу элементов полное подмножество M_0. Предположим, что $M_0\neq M$. Так как группа Γ транзитивна, то существует базисная транспозиция μ, переставляющая некоторый элемент $a\notin M_0$ с некоторым элементом $b\in M_0$. Группа перестановок, порожденная транспозицией μ и группой $S(M_0)$, есть группа $S(M_0\cup\{a\})$. Множество $M_0\cup\{a\}$ является полным и содержит множество M_0. Полученное противоречие доказывает, что группа Γ есть группа $S(M)$. □

7.2. Необходимые условия представимости функций в квадратурах, k-квадратурах и обобщенных квадратурах. Основная теорема (см. § 6) и вычисление классов пар групп доставляют топологические препятствия к представимости функций в обобщенных квадратурах, в k-квадратурах и в квадратурах. В этом пункте мы соберем вместе полученную информацию. Начнем с определения класса функций, представимых при помощи однозначных $\mathscr{S}$-функций и квадратур (k-квадратур, обобщенных квадратур). Как и в п. 2.2 введения, мы определим эти классы, задав списки основных функций и допустимых операций.

Функции, представимые при помощи однозначных $\mathscr{S}$-функций и квадратур.

Список основных функций: однозначные $\mathscr{S}$-функции.

Список допустимых операций: суперпозиции, мероморфные операции, дифференцирование, интегрирование.

Функции, представимые при помощи однозначных $\mathscr{S}$-функций и k-квадратур. Этот класс функций определяется в точности так же. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений степени не выше k.

Функции, представимые при помощи однозначных $\mathscr{S}$-функций и обобщенных квадратур. Этот класс функций определяется в точности так же. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений.

Из определения видно, что класс функций, представимых с помощью однозначных $\mathscr{S}$-функций и квадратур (k-квадратур, обобщенных квадратур), содержит класс функций, представимых в квадратурах (k-квадратурах, обобщенных квадратурах). Ясно, что только что определенные классы функций несравненно шире, чем их лиувиллевские аналоги. Поэтому, скажем, утверждение о непринадлежности функции f классу функций, представимых с помощью однозначных $\mathscr{S}$-функций и квадратур, значительно сильнее, чем утверждение о непредставимости f в квадратурах.

Утверждение 7.10. *Класс функций, представимых с помощью однозначных $\mathscr{S}$-функций и квадратур* (k*-квадратур, обобщенных квадратур*)*, лежит в классе $\mathscr{S}$-функций.*

Это утверждение немедленно вытекает из теоремы о замкнутости класса $\mathscr{S}$-функций (см. п. 4.2).

Результат об обобщенных квадратурах. *Замкнутая монодромная пара $[f]$ функции f, представимой в обобщенных квадратурах, обладает нормальной башней, каждый делитель относительно которой есть или конечная, или коммутативная группа. Более того, этому условию удовлетворяет замкнутая монодромная пара $[f]$ всякой функции f, представимой при помощи однозначных $\mathcal{S}$-функций и обобщенных квадратур. Если дополнительно известно, что функция f почти нормальна, то указанному условию удовлетворяет и группа монодромии функции $[f]$.*

Результат о k-квадратурах. *Замкнутая монодромная пара $[f]$ функции f, представимой в k-квадратурах, обладает нормальной башней, каждый делитель относительно которой есть или подгруппа группы $S(k)$, или коммутативная группа. Более того, этому условию удовлетворяет замкнутая монодромная пара $[f]$ всякой функции f, представимой при помощи однозначных $\mathcal{S}$-функций и k-квадратур. Если дополнительно известно, что функция f почти нормальна, то указанному условию удовлетворяет и группа монодромии функции $[f]$.*

Результат о квадратурах. *Замкнутая группа монодромии функции f, представимой в квадратурах, разрешима. Более того, разрешима замкнутая группа монодромии всякой функции f, представимой при помощи однозначных $\mathcal{S}$-функций и квадратур.*

Для доказательства этих результатов достаточно применить основную теорему к классам $\mathcal{S}$-функций $\widehat{\mathcal{M}}\langle\mathbb{C},\mathcal{K}\rangle$, $\widehat{\mathcal{M}}\langle\mathbb{C},S(k)\rangle$ и $\widehat{\mathcal{M}}\langle\mathbb{C}\rangle$ и воспользоваться вычислением классов $\mathcal{M}\langle\mathbb{C},\mathcal{K}\rangle$, $\mathcal{M}\langle\mathbb{C},S(k)\rangle$ и $\mathcal{M}\langle\mathbb{C}\rangle$.

Приведем теперь примеры функций, не представимых в обобщенных квадратурах. Пусть риманова поверхность функции f является универсальной накрывающей над областью $S^2\setminus A$, где S^2 — сфера Римана и A — конечное множество, содержащее не меньше трех точек. Тогда *функция f не выражается при помощи однозначных $\mathcal{S}$-функций и обобщенных квадратур.* Действительно, функция f является почти нормальной функцией. Замкнутая группа монодромии функции f свободна и некоммутативна, так как свободна и некоммутативна фундаментальная группа области $S^2\setminus A$.

Пример 1. Рассмотрим функцию f, конформно отображающую верхнюю полуплоскость на треугольник с нулевыми углами, ограниченный дугами окружностей. Функция f обратна к модулярной функции Пикара. Риманова поверхность функции f является универсальной накрывающей над сферой без трех точек, поэтому функция f не выражается при помощи однозначных $\mathcal{S}$-функций и обобщенных квадратур.

Функция f тесно связана с эллиптическими интегралами

$$K_1(k)=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{и} \quad K_2(k)=\int_0^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Каждые две из функций K_1, K_2 и f взаимно выражаются друг через друга при помощи квадратур (см. [16]). Поэтому *каждый из интегралов K_1 и K_2 не выражается при помощи однозначных $\mathcal{S}$-функций и обобщенных квадратур.*

Пример 1 допускает существенное обобщение: в § 3 главы 6 перечислены все многоугольники, ограниченные дугами окружностей, на которые можно отобразить верхнюю полуплоскость функцией, представимой в обобщенных квадратурах.

Пример 2. Пусть f — k-значная алгебраическая функция с некратными точками ветвления, расположенными в разных точках сферы Римана. *При $k>4$ функция f не выражается при помощи однозначных $\mathcal{S}$-функций и $(k-1)$-квадратур, суперпозиций и мероморфных операций. В частности, функция f не представима в $(k-1)$-квадратурах.*

Действительно, при обходе некратной точки ветвления функции f происходит транспозиция в множестве листов этой функции. Группа монодромии функции f является транзитивной группой перестановок, натянутой на транспозиции, т. е. группой $S(k)$. При $k>4$ группа $S(k)$ не лежит в классе $\mathcal{M}\langle\mathbb{C}, S(k-1)\rangle$.

В главе 7 топологические результаты о непредставимости функций в квадратурах (k-квадратурах и обобщенных квадратурах) обобщены на случай функций многих комплексных переменных.

§ 8. Классы особых множеств и обобщение основной теоремы

В § 4 рассматривались $\mathcal{S}$-функции, т. е. многозначные аналитические функции комплексного переменного, множества особых точек которых не более чем счетны. Пусть $\mathcal{S}$ — класс всех не более чем счетных подмножеств сферы Римана S^2. Перечислим свойства класса $\mathscr{S}$, которыми мы существенно пользовались:

1) если $A \in \mathscr{S}$, то множество $S^2 \setminus A$ всюду плотно и локально линейно связно;

2) существует непустое множество A, такое что $A \in \mathscr{S}$;

3) если $A \in \mathscr{S}$ и $B \subseteq A$, то $B \in \mathscr{S}$;

4) если $A_i \in \mathscr{S}$, $i = 1, 2, \ldots$, то $\bigcup\limits_1^\infty A_i \in \mathscr{S}$;

5) пусть U_1 и U_2 — открытые подмножества сферы и $f : U_1 \to U_2$ — обратимое аналитическое отображение, тогда если $A \subseteq U_1$ и $A \in \mathscr{S}$, то $f(A) \in \mathscr{S}$.

Полным классом множеств будем называть всякое множество подмножеств сферы Римана, удовлетворяющее свойствам 1–5. Многозначную аналитическую функцию будем называть *Q-функцией*, если множество ее особых точек лежит в некотором полном классе множеств Q. На Q-функции переносятся все определения и теоремы из § 5. Так, например, справедлив следующий

Вариант основной теоремы. *Для всякого полного класса множеств Q и полного класса пар $\mathscr{M}$ класс $\widehat{\mathscr{M}}$, состоящий из всех Q-функций f, для которых $[f] \in \mathscr{M}$, замкнут относительно дифференцирования, суперпозиций и мероморфных операций. Если дополнительно*

1) $\mathbb{C} \in \mathscr{M}$, то класс Q-функций $\widehat{\mathscr{M}}$ замкнут относительно интегрирования,

2) $S(k) \in \mathscr{M}$, то класс Q-функций $\widehat{\mathscr{M}}$ замкнут относительно решения алгебраических уравнений степени не выше k.

Приведем пример полного класса множеств. Пусть X_α — множество всех подмножеств сферы Римана, имеющих нулевую меру по Хаусдорфу веса α. Несложно показать, что при $\alpha \leqslant 1$ множество X_α образует полный класс подмножеств сферы.

Отметим, что новая формулировка основной теоремы позволяет усилить все отрицательные результаты. Остановимся, например, на результате о непредставимости функций в квадратурах. (Результаты о непредставимости в k-квадратурах и в обобщенных квадратурах обобщаются точно так же.) Определим следующий класс функций.

Функции, представимые при помощи однозначных X_1-функций и квадратур.

Список основных функций: однозначные X_1-функции.

Список допустимых операций: суперпозиции, мероморфные операции, дифференцирование, интегрирование.

Согласно новой формулировке основной теоремы $\mathcal{S}$-функция, имеющая неразрешимую группу монодромии, не только не представима в квадратурах, но и не представима при помощи однозначных X_1-функций и квадратур.

Следствие. *Если для многоугольника G, ограниченного дугами окружностей, не выполнены условия ни одного из трех случаев интегрируемости* (см. § 3 главы 6), *то функцию f_G нельзя выразить через однозначные X_1-функции при помощи обобщенных квадратур, суперпозиций и мероморфных операций.*

Глава 6

РАЗРЕШИМОСТЬ В КВАДРАТУРАХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ФУКСА И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЛУА

В этой главе описывается «разрешительная» часть топологической теории Галуа. Она основана на следующих классических результатах: на простой линейно-алгебраической части теории Пикара—Вессио и на теореме Фробениуса (см. теорему 1.2). Для доказательства разрешимости в k-квадратурах уравнения типа Фукса, имеющего k-разрешимую группу монодромии, приходится использовать также обычную теорию Галуа.

В § 1 строятся решения линейных дифференциальных уравнений типа Фукса с разрешимой (почти разрешимой, k-разрешимой) группой монодромии. В § 2 приводятся явные критерии для различных видов разрешимости систем линейных дифференциальных уравнений типа Фукса с достаточно маленькими коэффициентами. При построении решений используется теория Лаппо-Данилевского. В § 3 классифицируются многоугольники G, ограниченные дугами окружностей, для которых функция f_G, задающая отображение Римана верхней полуплоскости на многоугольник G, представима в явном виде.

§ 1. ТЕОРИЯ ПИКАРА—ВЕССИО ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА ФУКСА

В этом параграфе показывается, что топология расположения над комплексной плоскостью римановой поверхности общего решения линейного дифференциального уравнения типа Фукса отвечает за разрешимость уравнения в явном виде.

1.1. Группа монодромии линейного дифференциального уравнения, ее связь с группой Галуа. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}+r_1y^{(n-1)}+\ldots+r_ny=0, \tag{18}$$

где r_i — рациональные функции комплексной переменной x. Полюсы рациональных функций r_i и точка ∞ называются особыми точками уравнения (18).

В окрестности неособой точки x_0 решения уравнения образуют n-мерное пространство V^n. Возьмем теперь произвольную кривую $\gamma(t)$ на комплексной плоскости, ведущую из точки x_0 в точку x_1 и не проходящую через особые точки a_i. Решения уравнения будут аналитически продолжаться вдоль кривой, оставаясь при этом решениями уравнения. Поэтому каждой кривой γ отвечает линейное отображение M_γ пространства решений $V^n_{x_0}$ в точке x_0 в пространство решений $V^n_{x_1}$ в точке x_1.

Если пошевелить кривую γ, не задевая при этом особых точек и оставляя закрепленными концы, то отображение M_γ меняться не будет. Замкнутым кривым будет отвечать линейное преобразование пространства V^n в себя. Совокупность всех таких линейных преобразований пространства V^n образует группу, которая и называется *группой монодромии уравнения* (18). Итак, группа монодромии уравнения — это группа линейных преобразований решений, которые возникают при обходе особых точек. Группа монодромии уравнения характеризует многозначность его решений.

Лемма 1.1. 1. *Группа монодромии почти каждого решения уравнения* (18) *изоморфна группе монодромии этого уравнения.*

2. *Монодромная пара каждого решения уравнения* (18) *почти нормальна.*

Доказательство. Второе утверждение леммы вытекает из п. 5.4 главы 5. Остановимся на доказательстве первого утверждения. Группа монодромии уравнения (18) — это матричная группа, содержащая не более чем счетное число элементов. Для каждого нетождественного элемента этой группы множество его неподвижных точек является собственным подпространством конечномерного пространства решений уравнения (18). Множество решений, остающихся неподвижными, хотя бы для одного нетождественного преобразования из группы монодромии имеет нулевую меру в пространстве решений (так как объединение не более чем счетного числа собственных подпространств конечномерного пространства имеет в этом пространстве нулевую меру). Группа монодромии всех остальных решений уравнения (18) изоморфна группе монодромии уравнения. □

В окрестности неособой точки x_0 существуют n линейно независимых решений $y_1, \ldots, y_n$ уравнения (18). В этой окрестности можно рассмотреть поле функций $\mathcal{R}\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$, полученное присоединением к полю рациональных функций $\mathcal{R}$ всех решений y_i и всех их производных.

Каждое преобразование M_γ пространства решений из группы монодромии можно продолжить до автоморфизма всего поля функций $\mathcal{R}\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$. Действительно, вместе с функциями $y_1, \ldots, y_n$ вдоль кривой γ будет мероморфно продолжаться каждый элемент поля $\mathcal{R}\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$. Это продолжение и дает требуемый автоморфизм, так как при продолжении сохраняются арифметические операции и дифференцирование, а рациональные функции возвращаются к своему прежнему значению из-за однозначности.

Итак, *группа монодромии уравнения* (18) *лежит в группе Галуа этого уравнения над полем рациональных функций*.

Поле инвариантов группы монодромии — это подполе дифференциального поля $\mathcal{R}\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$, состоящее из однозначных функций. В отличие от алгебраических уравнений для дифференциальных уравнений поле инвариантов относительно действия группы монодромии может быть больше, чем поле рациональных функций.

Например, для дифференциального уравнения (18), у которого все коэффициенты $r_i(x)$ являются полиномами, все решения — целые функции. Но, конечно, решения таких уравнений далеко не всегда полиномиальны. Дело здесь в том, что решения дифференциальных уравнений могут расти при подходе к особым точкам экспоненциальным образом. Известен широкий класс линейных дифференциальных уравнений, для которых такого осложнения нет, т. е. для которых решения при подходе к каждой особой точке (вдоль любого сектора с вершиной в этой точке) растут не быстрее чем степенным образом. Дифференциальные уравнения, обладающие этим свойством, называются дифференциальными уравнениями типа Фукса (см. [13], [1]). Для дифференциальных уравнений типа Фукса справедлива следующая теорема Фробениуса.

Теорема 1.2. *Подполе дифференциального поля $\mathcal{R}\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$, состоящее из однозначных функций, для дифференциальных уравнений типа Фукса совпадает с полем рациональных функций.*

Прежде чем доказывать теорему Фробениуса, остановимся на ее непосредственных следствиях.

Следствие 1.3. *Алгебраическое замыкание группы монодромии M (т. е. наименьшая алгебраическая группа, содержащая M) уравнения типа Фукса совпадает с группой Галуа этого уравнения над полем рациональных функций.*

Доказательство. Следствие вытекает из теоремы Фробениуса и основной теоремы дифференциальной теории Галуа (см. § 3 главы 3). □

Теорема 1.4. *Линейное дифференциальное уравнение типа Фукса решается в квадратурах, в k-квадратурах или в обобщенных квадратурах, если и только если его группа монодромии соответственно разрешима, k-разрешима или почти разрешима.*

Доказательство вытекает из теоремы Пикара—Вессио (см. § 5 главы 3) и предыдущего следствия.

Дифференциальная теория Галуа доказывает тем самым два результата.

1. *Если группа монодромии дифференциального уравнения типа Фукса разрешима* (k-*разрешима, почти разрешима*), *то это уравнение решается в квадратурах* (*в k-квадратурах, в обобщенных квадратурах*).

2. *Если группа монодромии дифференциального уравнения типа Фукса неразрешима* (*не k-разрешима, не почти разрешима*), *то это уравнение не решается в квадратурах* (*в k-квадратурах и в обобщенных квадратурах*).

Первый из этих результатов не требует основной теоремы теории Галуа и, по существу, относится к линейной алгебре. Дело в том, что группу автоморфизмов дифференциального поля $R\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$, оставляющих на месте только поле рациональных функций, не нужно специально конструировать. Такой группой является группа монодромии. Поэтому для доказательства разрешимости в квадратурах и обобщенных квадратурах уравнений типа Фукса с разрешимой или с почти разрешимой группой монодромии достаточно воспользоваться линейно-алгебраическими рассуждениями из § 7 главы 3. Для доказательства разрешимости в k-квадратурах уравнение типа Фукса с k-разрешимой группой монодромии этих линейно-алгебраических рассуждений недостаточно. Нужно еще воспользоваться теорией Галуа алгебраических расширений поля рациональных функций. Впрочем, теория Галуа таких расширений весьма наглядна и геометрична (см. главу 4).

Наша теория позволяет усилить второй (отрицательный) результат. Об этом — в пункте 2.4. А сейчас перейдем к доказательству теоремы Фробениуса.

1.2. Доказательство теоремы Фробениуса. Мы покажем, что однозначная функция из дифференциального поля $\mathscr{R}\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$ мероморфна на сфере Римана и, следовательно, рациональна. Пусть $p \in \overline{\mathbb{C}}$ — особая точка уравнения типа Фукса и x — локальный параметр около этой точки, такой что $x(p) = 0$. Согласно теории Фукса около точки p каждое решение y представлено в виде конечной суммы $y = \sum f_{\alpha k} x^\alpha \ln^k x$, где $f_{\alpha k}$ — мероморфные функции около точки p. Ясно, что функции, представимые в виде $\sum f_{\alpha k} x^\alpha \ln^k x$, где функции $f_{\alpha k}$ мероморфны около точки p, образуют дифференциальное кольцо, содержащее поле функций, мероморфных около точки p. Нам нужно показать, что частное двух функций из этого дифференциального кольца является однозначной функцией около точки p, если и только если эта функция мероморфна. Доказательство этого факта основано на формулируемом ниже утверждении 1.5. Нам понадобятся следующие обозначения: $U(0, \varepsilon)$ — ε-окрестность точки 0 на комплексной плоскости; $\hat{U}(0, \varepsilon)$ — проколотая ε-окрестность точки 0, $\hat{U}(0, \varepsilon) = U(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$; $M(0, \varepsilon)$ и $\widehat{M}(0, \varepsilon)$ — поля мероморфных функций в областях $U(0, \varepsilon)$ и $\hat{U}(0, \varepsilon)$.

Два мероморфных ростка f_a и g_b называются эквивалентными над областью U, $a, b \in U$, если росток g_b получается из ростка f_a при продолжении вдоль некоторой кривой, лежащей в области U.

Определим теперь кольцо $K_a(0, \varepsilon)$. Мероморфный росток f_a, заданный в точке $a \in \hat{U}(0, \varepsilon)$, принадлежит кольцу $K_a(0, \varepsilon)$, если

1) росток f_a мероморфно продолжается вдоль всех кривых, лежащих в $\hat{U}(0, \varepsilon)$,

2) комплексное векторное пространство, натянутое на все мероморфные ростки в точке a, эквивалентные над окрестностью $\hat{U}(0, \varepsilon)$ ростку f_a, конечномерно.

Кольцо $K_a(0, \varepsilon)$ содержит поле $\widehat{M}(0, \varepsilon)$ и является векторным пространством над ним.

Утверждение 1.5 (о базисе). *При любом выборе ветвей функций* $\ln x$ *и* x^α, $[\operatorname{Re} \alpha] = 0$, *ростки* $x_a^\alpha \ln_a^k x$, $k = 0, 1, \ldots$, *образуют базис пространства* $K_a(0, \varepsilon)$ *над полем* $\widehat{M}(0, \varepsilon)$.

Сначала докажем лемму.

Лемма 1.6. *Ростки* $1, \ln_a x, \ldots, \ln_a^k x, \ldots$ *линейно независимы над полем* $\widehat{M}(0, \varepsilon)$.

Доказательство. Действительно, существование нетривиального соотношения $\sum a_k \ln_a^k x = 0$, $a_k \in \widehat{M}(0, \varepsilon)$, влечет за собой конечнозначность функции $\ln x$ в окрестности нуля. □

Доказательство утверждения основывается на рассмотрении оператора монодромии $A\colon K_a(0, \varepsilon) \to K_a(0, \varepsilon)$, который сопоставляет каждому ростку его продолжение вдоль замкнутой кривой, обходящей точку 0.

Лемма 1.7. *Ростки* $x_a^\alpha \ln_a^k x$, $[\operatorname{Re}\alpha] = 0$, $k = 0, \ldots, n-1$, *образуют базис в пространстве* $\ker(A - \lambda E)^n$, *где* λ *и* α *связаны соотношением* $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$.

Доказательство. Заметим, что пространство $\ker(A - \lambda E)$ не более чем одномерно. Действительно, если $Af_a = \lambda f_a$ и $Ag_a = \lambda g_a$, то $A(f_a/g_a) = f_a/g_a$. Следовательно, росток $\psi_a = f_a/g_a$ является ростком некоторой функции ψ из поля $\widehat{M}(0, \varepsilon)$ и $f_a = \psi g_a$. Поэтому пространство $\ker(A - \lambda E)^n$ имеет размерность не выше чем n. С другой стороны, легко проверить, что в этом пространстве лежат ростки $x_a^\alpha \ln_a^k x$, $[\operatorname{Re}\alpha] = 0$, $k = 0, \ldots, n-1$. Согласно лемме 1.6 эти ростки линейно независимы и поэтому образуют базис пространства $\ker(A - \lambda E)^n$. □

Пространства $\ker(A - \lambda E)^n$ при разных λ имеют нулевое пересечение. Поэтому все ростки $x_a^\alpha \ln_a^k x$ линейно независимы. Покажем, что всякий росток f_a из пространства $K_a(0, \varepsilon)$ можно разложить по этим функциям. По определению росток f_a лежит в некотором конечномерном пространстве V, инвариантном относительно оператора монодромии. Пусть $\tilde{A}$ — ограничение оператора A на пространство V. Согласно линейной алгебре пространство V раскладывается в прямую сумму подпространств $\ker(\tilde{A} - \lambda E)^{n_\lambda}$, где λ — собственное значение оператора $\tilde{A}$ и n_λ — его кратность. Из леммы 1.7 вытекает, что всякий элемент пространства V раскладывается по векторам $x_a^\alpha \ln_a^k x$.

Замечание. Выбор разных ветвей функций $\ln x$ и x^α приводит к разным базисам пространства $K_a(0, \varepsilon)$. Коэффициенты разложения векторов из таких базисов по другому базису являются комплексными числами.

Определение. 1. Мероморфный росток f_a, $a \in \hat{U}(0, \varepsilon)$, имеет над окрестностью $\hat{U}(0, \varepsilon)$ *целую фуксову особенность*, если $f_a \in K_a(0, \varepsilon)$ и коэффициенты разложения ростка f_a по базису $x_a^\alpha \ln_a^k x$ мероморфны, т. е. если

$$f_a = \sum f_{\alpha,k} \ln_a^k x \cdot x_a^\alpha, \quad \text{где } f_{\alpha,k} \in M(0,\varepsilon).$$

2. Мероморфный росток f_a, $a \in \hat{U}(0,\varepsilon)$, имеет над окрестностью $\hat{U}(0,\varepsilon)$ *фуксову особенность*, если он представи́м в виде частного двух ростков ψ_a, g_a, имеющих над $\hat{U}(0,\varepsilon)$ целую фуксову особенность, $f_a = \psi_a / g_a$.

Следствие 1.8. *Росток $f_a \in K_a(0,\varepsilon)$ имеет фуксову особенность над окрестностью $\hat{U}(0,\varepsilon)$, если и только если он имеет целую фуксову особенность над этой окрестностью.*

Доказательство. Росток f_a принадлежит $K_a(0,\varepsilon)$, следовательно, $f_a = \sum r_{\alpha,k} x_a^\alpha \ln_a^k x$, где $r_{\alpha,k} \in \widehat{M}(0,\varepsilon)$ — коэффициенты разложения ростка f_a по базису. Росток f_a имеет также фуксову особенность, поэтому справедливо равенство

$$\frac{\sum p_{\alpha,k} x_a^\alpha \ln_a^k x}{\sum q_{\alpha,k} x_a^\alpha \ln_a^k x} - \sum r_{\alpha,k} x_a^\alpha \ln_a^k x = 0,$$

где $p_{\alpha,k}, q_{\alpha,k}$ — некоторые элементы поля $M(0,\varepsilon)$. Умножим равенство на $\sum q_{\alpha,k} x_a^\alpha \ln_a^k x$, раскроем скобки и приведем, если надо, ростки $x_a^\beta \ln_a^k x$ к виду $x^n \cdot x_a^\alpha \ln_a^k x$, где n — целое и $[\operatorname{Re}\alpha] = 0$. Так как ростки $x_a^\alpha \ln_a^k x$ линейно независимы над полем $\widehat{M}(0,\varepsilon)$, то равенство эквивалентно системе уравнений, полученной приравниванием к нулю коэффициентов при этих функциях. Полученная система представляет собой систему линейных уравнений относительно функций $r_{\alpha,k}$ с коэффициентами из поля $M(0,\varepsilon)$. Система имеет единственное решение, так как функции $r_{\alpha,k}$ определены однозначно. Следовательно, функции $r_{\alpha,k}$ лежат в поле $M(0,\varepsilon)$. ☐

Следствие 1.9. *Если росток f_a мероморфной в окрестности $\hat{U}(0,\varepsilon)$ функции f имеет над этой окрестностью фуксову особенность, то функция f мероморфна в окрестности $\hat{U}(0,\varepsilon)$.*

Доказательство. Росток f_a принадлежит $K_a(0,\varepsilon)$, и его разложение по базису имеет вид $f_a = f \cdot 1$. Согласно следствию 1 росток f_a имеет целую фуксову особенность, и поэтому $f \in M(0,\varepsilon)$. ☐

Следствие 1.9 завершает доказательство теоремы Фробениуса.

1.3. Группа монодромии систем линейных дифференциальных уравнений, ее связь с группой Галуа. Результаты из п. 1.1 автоматически переносятся на системы линейных дифференциальных уравнений с регулярными особыми точками.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}, \tag{19}$$

где $\boldsymbol{y} = y_1(x), \ldots, y_n(x)$, $\boldsymbol{A}(x) = a_{i,j}(x)$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, — матрица рациональных функций и x — комплексная переменная. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — полюсы матрицы $\boldsymbol{A}(x)$. В окрестности неособой точки x_0, $x_0 \neq \infty$, $x_0 \neq a_i$, $i = 1, \ldots, k$, решения уравнения образуют n-мерное пространство V^n. Возьмем теперь произвольную кривую $\gamma(t)$ на комплексной плоскости, ведущую из точки x_0 в точку x_1 и не проходящую через особые точки a_i, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$, $\gamma(t) \neq a_i$. Решения уравнения будут аналитически продолжаться вдоль кривой, оставаясь при этом решениями уравнения. Поэтому каждой кривой γ отвечает линейное отображение M_γ пространства решений $V^n_{x_0}$ в точке x_0 в пространство решений $V^n_{x_1}$ в точке x_1.

Если пошевелить кривую γ, не задевая при этом особых точек и оставляя закрепленными концы, то отображение M_γ меняться не будет. Замкнутым кривым будет отвечать линейное преобразование пространства V^n в себя. Совокупность всех таких линейных преобразований пространства V^n образует группу, которая и называется *группой монодромии уравнения* (19). Итак, группа монодромии уравнения — это группа линейных преобразований решений, которые возникают при обходе особых точек. Группа монодромии уравнения характеризует многозначность его решений.

Лемма 1.10. 1. *Группа монодромии почти каждого решения системы* (19) *совпадает с группой монодромии системы* (19).

2. *Монодромная пара каждой компоненты каждого решения системы* (19) *почти нормальна.*

3. *Если группа монодромии системы* (19) *не лежит в некотором полном классе пар групп $\mathscr{M}$, то монодромная пара одной из компонент почти каждого решения этой системы не лежит в $\mathscr{M}$.*

Доказательство. Первые два утверждения леммы доказываются так же, как лемма 1.1. Третье утверждение вытекает из первого и из леммы 6.5 главы 5. □

В окрестности неособой точки x_0 существуют все решения $\boldsymbol{y}_1, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{y}_n$ уравнения (19). В этой окрестности можно рассмотреть дифференциальное поле функций $R\langle \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n \rangle$, полученное присоединением к полю рациональных функций R всех компонент $y_{i,1}, \ldots, y_{i,n}$ евсех решений $\boldsymbol{y}_i$ и всех их производных $y_{i,j}^{(p)}$.

Каждое преобразование M_γ пространства решений из группы монодромии можно продолжить до автоморфизма всего дифференциального поля $\mathscr{R}\langle \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n \rangle$ над полем R. Действительно, вместе с вектор-функциями $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ вдоль кривой γ будет мероморфно продолжаться каждый элемент поля $\mathscr{R}\langle \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n \rangle$. Это продолжение и дает требуемый автоморфизм, так как при продолжении сохраняются арифметические операции и дифференцирование, а рациональные функции возвращаются к своему прежнему значению из-за однозначности.

Особая точка уравнения (19) называется *регулярной*, если в любом секторе с вершиной в особой точке все решения при подходе к этой точке растут не быстрее чем степенным образом (см. [13], [1]). Известно, что около регулярной особой точки каждая компонента каждого решения имеет целую фуксову особенность (см. определение из п. 1.2). Уравнение (19) называется регулярным, если все его особые точки (включая ∞) регулярны. Для регулярного уравнения (19) все однозначные функции из поля $\mathscr{R}\langle \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n \rangle$ являются рациональными функциями.

Теорема 1.11. *Для регулярной системы линейных дифференциальных уравнений* (19) *дифференциальное поле* $\mathscr{R}\langle \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n \rangle$ *является расширением Пикара—Вессио поля R. Группа Галуа этого расширения является алгебраическим замыканием группы монодромии системы уравнений* (19).

Доказательство. На дифференциальном поле $\mathscr{R}\langle \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n \rangle$ группа монодромии действует как группа изоморфизмов с полем инвариантов R. Поле $\mathscr{R}\langle \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n \rangle$ порождено над R конечномерным $\mathscr{C}$-линейным пространством, инвариантным относительно действия монодромии, а именно линейным пространством, натянутым на все компоненты всех решений уравнения (19). Теперь теорема вытекает из следствия 3.2 главы 3. □

Теорема 1.12. *Каждая компонента каждого решения регулярной системы линейных дифференциальных уравнений выражается в квадратурах, в k-квадратурах и в обобщенных квадратурах, если и только если группа монодромии системы, соответственно, разрешима, k-разрешима или почти разрешима.*

Доказательство вытекает из теоремы Пикара—Вессио (см. теорему 5.1 главы 3) и из предыдущей теоремы. Как и в случае уравнения типа Фукса, «положительная» часть теоремы, относящаяся к разрешимости системы, доказывается, в основном, при помощи линейной алгебры (см. § 7 главы 3 и п. 1.1). А отрицательную часть теоремы значительно усиливает топологическая теория Галуа (см. п. 2.4).

§ 2. Теория Галуа систем линейных дифференциальных уравнений типа Фукса с малыми коэффициентами

В этом параграфе приводятся явные критерии для различных видов разрешимости систем линейных дифференциальных уравнений типа Фукса с достаточно маленькими коэффициентами [18]. Доказательство использует критерий Колчина (см. § 8 главы 5) и теорию Лаппо-Данилевского.

2.1. Системы уравнений типа Фукса. Среди систем регулярных линейных дифференциальных уравнений выделяются системы линейных дифференциальных уравнений типа Фукса. Это уравнения вида $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, где матрица $\boldsymbol{A}(x)$ не имеет кратных полюсов и обращается в нуль на бесконечности. Другими словами, это уравнения вида

$$\boldsymbol{y}' = \sum_{p=1}^{k} \frac{A_p}{(x-a_p)}\boldsymbol{y},$$

где A_p — комплексная $(n \times n)$-матрица, а $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ — вектор в $\mathbb{C}^n$. Точки a_p называются полюсами, а матрицы A_p — матрицами-вычетами системы уравнений типа Фукса.

Для систем уравнений типа Фукса, как и для других регулярных систем дифференциальных уравнений, *алгебраическое замыкание группы монодромии совпадает с группой Галуа порожденного системой уравнений расширения Пикара—Вессио поля рациональных функций* (см. п. 1.3).

И. А. Лаппо-Данилевский развил теорию аналитических функций от матриц и применил ее к дифференциальным уравнениям [23]. Нам понадобятся результаты Лаппо-Данилевского относительно систем уравнений типа Фукса, которые мы будем использовать в виде следствия, приведенного в конце этого пункта.

Возьмем неособую точку $x_0 \neq a_p$. Зафиксируем k кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ так, чтобы кривая γ_p начиналась в точке x_0, подходила к полюсу a_p, обходила его и возвращалась назад в точку x_0. Кривым $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$

отвечают матрицы монодромии $M_1, \ldots, M_k$. Очевидно, что матрицы $M_1, \ldots, M_k$ порождают группу монодромии. При фиксации кривых матрицы монодромии зависят лишь от матриц-вычетов. Эта зависимость изучалась Лаппо-Данилевским.

Во-первых, он показал, что матрицы монодромии M_p — целые функции матриц-вычетов A_j. Точнее, *существуют специальные ряды с комплексными коэффициентами*

$$M_p = E + 2\pi i A_p + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant k} c_{i,j} A_i A_j + \ldots \tag{20}$$

от матриц $A_1, \ldots, A_k$, выражающие матрицы монодромии M_p и сходящиеся при любых матрицах $A_1, \ldots, A_k$.

Хотя матрица монодромии M_p зависит от всех матриц-вычетов A_j, ее собственные числа определяются только по собственным числам матрицы-вычета A_p.

Теорема 2.1 [13], [1]. *Пусть $\{\mu_m\}$ — набор собственных чисел матрицы A_p. Тогда $\{e^{2\pi i \mu_m}\}$ — набор собственных чисел матрицы M_p.*

Знаменитая проблема Римана—Гильберта — это вопрос о разрешимости обратной задачи, т. е. о существовании уравнений типа Фукса с заданным набором матриц монодромии. Для почти всякого набора матриц монодромии задача Римана—Гильберта разрешима. Традиционно считалось, что этот классический результат переносится на любые наборы матриц монодромии. Однако, как обнаружил А. А. Болибрух [12], [13], это не так. Он предъявил пример набора матриц монодромии, для которых проблема Римана—Гильберта неразрешима.

Далее, Лаппо-Данилевский показал, что в предположении малости матриц-вычетов A_j матрицы-вычеты A_j — однозначные аналитические функции матриц монодромии M_p. А именно, он показал, что если ограничиться уравнениями типа Фукса с достаточно малыми матрицами-вычетами $\|A_j\| < \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon(n, a_1, \ldots, a_k)$, то для достаточно близких к E матриц монодромии M_p, $\|M_p - E\| < \varepsilon$, задача Римана—Гильберта имеет единственное решение. Более того, *существуют специальные ряды с комплексными коэффициентами*

$$A_p = -\frac{1}{2\pi i} E + \frac{1}{2\pi i} M_p + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant k} b_{i,j} M_i M_j + \ldots \tag{21}$$

от матриц $M_1, \ldots, M_k$, выражающие матрицы-вычеты A_p и сходящиеся при $\|M_p - E\| < \varepsilon$.

Ряды (21) получаются обращением рядов (20). Этот результат является своеобразной теоремой о неявной функции (для аналитических отображений с некоммутативными переменными).

Теорию Лаппо-Данилевского мы будем использовать в форме такого следствия.

Следствие 2.2. *Матрицы монодромии лежат в алгебре с единицей, натянутой на матрицы-вычеты. Обратно, если матрицы-вычеты достаточно малы и матрицы монодромии достаточно близки к E, то матрицы-вычеты лежат в алгебре с единицей, натянутой на матрицы монодромии.*

2.2. Группы, порожденные матрицами, близкими к единичной. В этом пункте доказывается аналог теоремы Ли для матричных групп, порожденных матрицами, близкими к единичным. Напомним формулировку теоремы Жордана.

Теорема Жордана. *Конечная группа G линейных преобразований n-мерного пространства обладает диагональным нормальным делителем G_d ограниченного индекса,* $\operatorname{ind}(G, G_d) \leqslant J(n)$.

Известны различные явные оценки сверху чисел $J(n)$. (Например, Шур показал, что $J(n) \leqslant (\sqrt{8n}+1)^{2n^2} - (\sqrt{8n}-1)^{2n^2}$, см. [33].)

Утверждение 2.3. *Существует целое число $T(n)$, такое что подгруппа G в $GL(n)$ обладает разрешимым нормальным делителем конечного индекса, если и только если она обладает треугольным нормальным делителем индекса не больше $T(n)$.*

Доказательство. Теорема Ли гарантирует существование у группы G треугольного нормального делителя G_l конечного индекса. Действительно, достаточно положить $G_l = G \cap \bar{G}_0$, где $\bar{G}_0$ — компонента связности единицы алгебраического замыкания $\bar{G}$ группы G. Однако индекс нормального делителя G_l может быть как угодно велик. Так, например, для группы $\mathbb{Z}_k$ корней степени k из единицы этот индекс равен k при $n=1$. Мы будем увеличивать нормальный делитель G_l, оставляя его треугольным. Отметим, что нам достаточно доказать существование треугольной подгруппы ограниченного индекса, так как подгруппа индекса k содержит нормальный делитель индекса не больше $k!$. Доказательство будем вести индукцией по размерности n. Если группа G обладает инвариантным пространством V^k размерности k, $0 < k < n$, мы сможем сделать индукционный шаг. Действительно, группа G в этом случае действует и на пространстве V^k размерности k, и на факторпространстве V^n/V^k размерности $n-k$. По индукции можно считать, что группа G обладает нормальным делителем индекса не больше $T(k)T(n-k)$, который треуголен как в V^k, так и в V^n/V^k, т. е. треуголен в V^n.

Нормальный делитель G_l приводится к треугольному виду и обладает поэтому ненулевым максимальным собственным подпространством V^k. Возникают два случая: $V^k \subset V^n$ и $V^k = V^n$. Рассмотрим первый случай: $V^k \subset V^n$. Обозначим через $\widetilde{G}_l$ подгруппу группы G, состоящую из всех преобразований, для которых V^k инвариантно (в этом месте и происходит увеличение нормального делителя G_l). Докажем, что $\operatorname{ind}(G, \widetilde{G}_l) \leqslant n$. Действительно, группа перестановок группы G переставляет максимальные собственные пространства всякого своего нормального делителя и, в частности, G_l. Однако максимальных собственных пространств не может быть больше n. Отсюда и вытекает нужное соотношение $\operatorname{ind}(G, \widetilde{G}_l) \leqslant n$. Для окончания доказательства достаточно применить к группе $\widetilde{G}_l$ индукционный шаг. Рассмотрим второй случай: $V^k = V^n$, т. е. G_l состоит из матриц λE. Можно считать, что группа G состоит из матриц с единичным детерминантом. Действительно, в противном случае можно рассмотреть группу, составленную из матриц $(\det A)^{-1}A$. Нормальный делитель D_l при этом предположении конечен (так как $\lambda^n = 1$). Группа G тоже конечна, так как $\operatorname{ind}(G, G_l) < \infty$. Для окончания доказательства достаточно воспользоваться теоремой Жордана. □

Утверждение 2.3′. *Существует целое число $D(n)$, такое что подгруппа G в $GL(n)$ обладает диагональным нормальным делителем конечного индекса, если и только если она обладает диагональным нормальным делителем индекса не больше $D(n)$.*

Утверждение 2.3′ доказывается точно так же, как утверждение 2.3, и мы не будем останавливаться на его доказательстве. Числа $T(n)$ и $D(n)$ также допускают явную оценку сверху (ср. [33]).

Лемма 2.4. *Уравнение $X^N = A$, $\|A-E\| < \varepsilon$, $\|X-E\| < \varepsilon$, в котором X и A — комплексные $(n \times n)$-матрицы, близкие к E, имеет единственное решение, если $\varepsilon = \varepsilon(n, N)$ достаточно мало. При этом каждое инвариантное пространство V матрицы A будет инвариантно и для матрицы X.*

Доказательство. Положим $B = A - E$ и

$$X = E + \frac{1}{N}B + \frac{1}{2}\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N} - 1\right)B^2 + \ldots$$

При $\|B\| < 1$ ряд сходится и $X^N = A$. Выберем теперь $\varepsilon = \varepsilon(n, N)$ столь малым, чтобы теорема о неявной функции гарантировала единственность решения. Пространство V будет инвариантно относительно $B = A - E$ и, следовательно, относительно X. $\square$

Лемма 2.5. *Пусть N-е степени всех матриц из группы G лежат в некоторой алгебраической группе L, тогда группа $G \cap L$ имеет в группе G конечный индекс.*

Доказательство. Рассмотрим алгебраическое замыкание $\bar{G}$ группы G. Легко видеть, что $X^N \in L$ при $X \in \bar{G}$. Обозначим через $\bar{G}_0$ и L_0 компоненты связности единицы групп $\bar{G}$ и L. Если A лежит в группе L_0, $A = \exp(M)$, то уравнение $X^N = A$ имеет решение в этой же группе. Действительно, достаточно положить $X = \exp(M/N)$. Но уравнение $X^N = A$ имеет единственное решение при матрицах A и X, близких к E. Отсюда следует, что $\bar{G}_0 \subseteq L_0 \subseteq L$. Лемма теперь вытекает из того, что $\operatorname{ind}(\bar{G}, \bar{G}_0) < \infty$. $\square$

Замечание. При $L = e$ лемма 2.5 превращается в теорему Бернсайда: *матричная группа с тождеством $X^N = e$ конечна*.

Утверждение 2.6. *Существует целое число $N(n)$, такое что подгруппа G в $GL(n)$ обладает разрешимым нормальным делителем конечного индекса, если и только если все матрицы $A^{N(n)}$, $A \in G$, одновременно приводятся к треугольному виду.*

Доказательство. В одну сторону утверждение 2.6 вытекает из утверждения 2.3, если положить $N(n) = T(n)!$. Для доказательства в другую сторону нужно применить лемму 2.5 для группы G и группы треугольных матриц L. $\square$

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Утверждение 2.6′. *Существует целое число $N(n)$, такое что подгруппа G в $GL(n)$ обладает диагональным нормальным делителем конечного индекса, если и только если все матрицы $A^{N(n)}$, $A \in G$, одновременно приводятся к диагональному виду.*

Теорема 2.7. *Существует положительное число $\varepsilon(n) > 0$, такое что подгруппа G в $GL(n)$, порожденная матрицами A_α, близкими к единичной, $\|E - A_\alpha\| < \varepsilon(n)$, обладает разрешимым нормальным делителем конечного индекса, если и только если все матрицы A_α одновременно приводятся к треугольному виду.*

Доказательство. Выберем $\varepsilon(n) > 0$ столь малым, что для уравнения $X^{N(n)} = A$, $\|E - X\| < \varepsilon(n)$, выполнены условия леммы 2.4. По утверждению 2.6 все матрицы $A_\alpha^{N(n)}$ должны приводиться к треугольному виду. Но по лемме 2.4 инвариантные пространства матриц $A_\alpha^{N(n)}$ и A_α совпадают. Поэтому матрицы A_α тоже приводятся к треугольному виду. □

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Утверждение 2.8. *Существует положительное число $\varepsilon(n) > 0$, такое что подгруппа G в $GL(n)$, порожденная матрицами A_α, близкими к единичной, $\|E - A_\alpha\| < \varepsilon(n)$, обладает диагональным нормальным делителем конечного индекса, если и только если все матрицы A_α одновременно приводятся к диагональному виду.*

Замечание. В теореме 2.7 и в утверждении 2.8 можно ослабить требование близости матриц A_α к единичной. Достаточно ограничиться близостью в топологии Зарисского. Скажем, что матрица A k-резонансна, если у нее найдутся разные собственные числа λ_1 и λ_2, связанные соотношением $\lambda_1 = \varepsilon_k \lambda_2$, $\varepsilon_k^k = 1$, $\varepsilon_k \neq 1$. Все k-резонансные матрицы образуют алгебраическое множество, не содержащее единицы. Достаточно требовать, чтобы матрицы A_α не были $N(n)$-резонансными.

2.3. Явные критерии разрешимости. Перейдем к явным критериям разрешимости. Начнем с двух простых лемм.

Лемма 2.9. *Система типа Фукса n-го порядка*

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{x - a_i} y$$

с достаточно малыми коэффициентами $\|A_i\| < \varepsilon = \varepsilon(n, a_1, \ldots, a_k)$ решается в обобщенных квадратурах, если и только если ее матрицы монодромии M_i треугольны.

Доказательство. Группа монодромии системы порождена матрицами монодромии M_i. Если матрицы-вычеты A_i малы, $\|A_i\| < \varepsilon$, то матрицы M_i будут близки к E. Выберем $\varepsilon = \varepsilon(n, a_1, \ldots, a_k)$ столь малым, чтобы для матриц монодромии $M_1, \ldots, M_k$ выполнялись условия теоремы 2.7. В силу этой теоремы у группы монодромии существует разрешимый нормальный делитель конечного индекса, если и только если матрицы $M_1, \ldots, M_k$ треугольны. Теперь осталось воспользоваться теоремой 1.12. □

Лемма 2.10. *Для системы типа Фукса треугольность и диагональность группы Галуа эквивалентны тому же условию на матрицы монодромии $M_1, \ldots, M_k$.*

Доказательство. Группа монодромии порождена матрицами монодромии $M_1, \ldots, M_k$ и треугольна или диагональна вместе с ними. Теперь лемма вытекает из того, что для уравнения типа Фукса группа Галуа совпадает с алгебраическим замыканием группы монодромии (см. п. 1.3). □

Критерии разрешимости. *По набору полюсов $a_1, \ldots, a_k$ и порядку n можно указать число $\varepsilon(n, a_1, \ldots, a_k)$, такое что условия разрешимости для систем n-го порядка типа Фукса*

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{x - a_i} \boldsymbol{y}$$

с малыми коэффициентами, $\|A_i\| \leqslant \varepsilon(n, a_1, \ldots, a_k)$, принимают явный вид. Именно, система решается

1) *в квадратурах или обобщенных квадратурах*[1]*, если и только если матрицы A_i (в некотором базисе) треугольны*;

2) *в интегралах и алгебраических функциях или интегралах и радикалах*[1]*, если и только если матрицы A_i треугольны и их собственные числа рациональны*;

3) *в интегралах, если и только если матрицы A_i треугольны и их собственные числа равны нулю*;

4) *в экспонентах интегралов и в алгебраических функциях или в экспонентах интегралов*[1]*, если и только если матрицы A_i диагональны*;

5) *в алгебраических функциях или в радикалах*[1]*, если и только если матрицы A_i диагональны и их собственные числа рациональны*;

6) *в рациональных функциях, если и только если все матрицы A_i равны нулю.*

Доказательство. Выберем $\varepsilon(n, a_1, \ldots, a_k)$ столь малым, чтобы выполнялись условия леммы 2.4 и чтобы матрицы-вычеты выражались через матрицы монодромии (см. п. 2.1).

Каждый из видов разрешимости влечет за собой разрешимость в обобщенных квадратурах. Разрешимость в обобщенных квадратурах в наших предположениях влечет треугольность матриц монодромии (лемма 2.9) и, следовательно, треугольность группы Галуа (лемма 2.10). Поэтому мы находимся в рамках применимости критерия, приведенного в конце § 8 главы 3. Нам нужно превратить

[1]Эти виды разрешимости различаются, если не ограничивать величины коэффициентов.

условия на группу Галуа из этого критерия в условия на матрицы-вычеты A_i.

Условия на группу Галуа из критерия § 8 главы 3 эквивалентны тем же условиям на матрицы монодромии $M_1, \ldots, M_k$. Частично мы это проверили в лемме 2.10. Остальная проверка столь же несложна.

В предположениях нашей теоремы условие принадлежности матриц монодромии $M_1, \ldots, M_k$ некоторой алгебре с единицей, например алгебре треугольных или диагональных матриц, эквивалентно тому же условию на матрицы-вычеты $A_1, \ldots, A_k$ (следствие из п. 2.1).

Собственные числа матрицы M_i будут корнями из единицы или единицами, если и только если собственные числа матрицы A_i — рациональные или целые числа (см. п. 2.1).

Теперь наш критерий вытекает из критерия § 8 главы 3. □

Замечание. Незадолго до смерти Андрей Андреевич Болибрух сказал мне, что, по его мнению, в условиях критерия разрешимости требование малости матриц A_i можно ослабить. *Достаточно лишь требовать, чтобы собственные числа этих матриц были малы.*

2.4. Сильная неразрешимость уравнений. Топологическая теория Галуа позволяет усилить классические результаты о неразрешимости уравнений в явном виде.

Группа монодромии алгебраической функции совпадает с группой Галуа соответствующего расширения Галуа поля рациональных функций. Поэтому согласно теории Галуа 1) *алгебраическая функция представима в радикалах, если и только если ее группа монодромии разрешима*; 2) *алгебраическая функция выражается через рациональные функции при помощи радикалов и решения алгебраических уравнений степени k, если и только если ее группа монодромии k-разрешима*.

Из наших результатов (см. п. 7.2 главы 5) вытекает такое следствие.

Следствие 2.11. 1. *Если группа монодромии алгебраического уравнения над полем рациональных функций неразрешима, то его решение не принадлежит классу функций, представимых при помощи однозначных $\mathcal{S}$-функций и квадратур.*

2. *Если группа монодромии алгебраического уравнения не k-разрешима, то его решение не принадлежит классу функций, представимых при помощи однозначных $\mathcal{S}$-функций и k-квадратур.*

Аналогичным образом усиливаются результаты о неразрешимости в явном виде из п. 1.1, 1.3 и 2.3.

Следствие 2.12. *Если группа монодромии линейного дифференциального уравнения над полем рациональных функций неразрешима (не k-разрешима, не почти разрешима), то общее решение уравнения не принадлежит классу функций, представимых при помощи однозначных $\mathcal{S}$-функций и квадратур (k-квадратур, обобщенных квадратур).*

Следствие 2.13. *Если группа монодромии системы линейных дифференциальных уравнений над полем рациональных функций неразрешима (не k-разрешима, не почти разрешима), то по крайней мере одна из компонент почти каждого решения не лежит в классе функций, представимых с помощью однозначных $\mathcal{S}$-функций и квадратур (k-квадратур, обобщенных квадратур).*

Следствие 2.14. *Если система дифференциальных уравнений типа Фукса с маленькими коэффициентами не является треугольной, то по крайней мере одна из компонент почти каждого решения не лежит в классе функций, представимых с помощью однозначных $\mathcal{S}$-функций и квадратур (k-квадратур, обобщенных квадратур).*

§ 3. Отображение полуплоскости на многоугольник, ограниченный дугами окружностей

В этом параграфе классифицируются многоугольники G, ограниченные дугами окружностей, для которых функция f_G, задающая отображение Римана верхней полуплоскости на многоугольник G, представима в явном виде. Мы пользуемся принципом симметрии Римана—Шварца и описанием конечных подгрупп группы дробно-линейных преобразований.

3.1. Применение принципа симметрии. Рассмотрим на комплексной плоскости многоугольник G, ограниченный дугами окружностей. Согласно теореме Римана существует функция f_G, отображающая верхнюю полуплоскость на многоугольник G. Это отображение изучалось Риманом, Шварцем, Кристоффелем, Клейном и другими. Напомним нужные нам классические результаты.

Обозначим через $B = \{b_j\}$ прообраз множества вершин многоугольника G при отображении f_G, через $H(G)$ — группу конформных преобразований сферы, порожденную инверсиями относительно сторон многоугольника, и через $L(G)$ — подгруппу индекса 2 группы $H(G)$, состоящую из дробно-линейных преобразований. Из принципа симметрии Римана—Шварца вытекает следующее

Утверждение. 1. *Функция f_G мероморфно продолжается вдоль всех кривых, не пересекающих множество B.*

2. *Все ростки многозначной функции f_G в неособой точке $a \notin B$ получаются применением к фиксированному ростку f_a группы дробно-линейных преобразований $L(G)$.*

3. *Группа монодромии функции f_G изоморфна группе $L(G)$.*

4. *Около точек b_j функция f_G имеет особенности следующего вида. Если в вершине a_j многоугольника G, соответствующей точке b_j, угол α_j не равен 0, то функция f_G дробно-линейным преобразованием приводится к виду $f_G(z) = (z - b_j)^{\beta_j}\varphi(z)$, где $\beta_j = \alpha_j/2\pi$, а функция $\varphi(z)$ голоморфна около точки b_j. Если же угол α_j равен 0, то функция f_G дробно-линейным преобразованием приводится к виду $f_G(z) = \ln(z) + \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ голоморфна около b_j.*

Из наших результатов вытекает, что если функция f_G представима в обобщенных квадратурах, то группа $L(G)$ и вместе с ней группа $H(G)$ лежат в классе $\mathcal{M}\langle\mathbb{C}, \mathcal{K}\rangle$.

3.2. Группы дробно-линейных и конформных преобразований класса $\mathcal{M}\langle\mathbb{C}, \mathcal{K}\rangle$. Пусть π — эпиморфизм группы $SL(2)$ матриц 2-го порядка с определителем 1 в группу дробно-линейных преобразований L,

$$\pi\colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \frac{az+b}{cz+d}.$$

Так как $\ker\pi = \mathbb{Z}_2$, группа $\tilde{L} \subseteq L$ и группа $\pi^{-1}(\tilde{L}) = \Gamma \subseteq SL(2)$ лежат в классе $\mathcal{M}\langle\mathbb{C}, \mathcal{K}\rangle$ одновременно. Группа Γ — матричная группа, поэтому она лежит в классе $\mathcal{M}\langle\mathbb{C}, \mathcal{K}\rangle$, если и только если она обладает нормальным делителем Γ_0 конечного индекса, приводящимся к треугольному виду. (Этот вариант теоремы Ли верен и в многомерном пространстве и играет важную роль в дифференциальной теории Галуа; см. § 6 главы 3.) Группа Γ_0 состоит из матриц второго порядка, поэтому группа Γ_0 приводится к треугольному виду в одном из следующих трех случаев:

1) группа Γ_0 имеет единственное собственное одномерное подпространство;

2) группа Γ_0 имеет два собственных одномерных подпространства;

3) группа Γ_0 имеет двумерное собственное пространство.

Перейдем теперь к группе дробно-линейных преобразований $\tilde{L} = \pi(\Gamma)$. Группа $\tilde{L}$ принадлежит классу $\mathcal{M}\langle\mathbb{C},\mathcal{K}\rangle$, если и только если она обладает нормальным делителем $L_0 = \pi(\Gamma_0)$ конечного индекса, множество неподвижных точек которого состоит из одной точки, или из двух, или из всей сферы Римана.

Группа конформных преобразований $\widetilde{H}$ обладает подгруппой $\tilde{L}$ индекса 2 (или индекса 1), состоящей из дробно-линейных преобразований. Поэтому для группы конформных преобразований $\widetilde{H}$ класса $\mathcal{M}\langle\mathbb{C},\mathcal{K}\rangle$ справедливо аналогичное утверждение.

Лемма о конформных преобразованиях класса $\mathcal{M}\langle\mathbb{C},\mathcal{K}\rangle$. *Группа конформных преобразований сферы принадлежит классу $\mathcal{M}\langle\mathbb{C},\mathcal{K}\rangle$, если и только если выполнено одно из трех условий*:

1) *группа имеет неподвижную точку*;

2) *группа имеет инвариантное множество, состоящее из двух точек*;

3) *группа конечна*.

Лемма вытекает из предыдущего, так как множество неподвижных точек нормального делителя инвариантно относительно действия группы. Хорошо известно, что *конечная группа $\tilde{L}$ дробно-линейных преобразований сферы дробно-линейной заменой координаты приводится к группе вращений*.

Несложно показать, что если произведению инверсий относительно двух разных окружностей при стереографической проекции соответствует вращение сферы, то этим окружностям соответствуют большие круги. Поэтому каждая *конечная группа $\widetilde{H}$ конформных преобразований, порожденная инверсиями относительно окружностей, дробно-линейной заменой координаты приводится к группе движений сферы, порожденной отражениями*.

Хорошо известны все конечные группы движений, порожденные отражениями. Каждая такая группа есть группа движений одного из следующих тел:

1) правильной n-угольной пирамиды;

2) n-угольного диэдра, или тела, образованного двумя равными правильными n-угольными пирамидами, склеенными по общему основанию;

3) тетраэдра;

4) куба или октаэдра;

5) додекаэдра или икосаэдра.

Все эти группы движений, за исключением группы додекаэдра-икосаэдра, разрешимы. На сфере, центр которой совпадает с центром тяжести тела, плоскости симметрии тела высекают некоторую сетку больших кругов. Сетки, соответствующие перечисленным телам, будем называть конечными сетками больших кругов. Стереографические проекции конечных сеток изображены на рис. 3.

3.3. Интегрируемые случаи. Вернемся к вопросу о представимости функции f_G в обобщенных квадратурах.

Рассмотрим возникающие случаи и покажем, что найденные условия на группу монодромии не только необходимы, но и достаточны для представимости функции f_G в обобщенных квадратурах.

Первый случай интегрируемости. Группа $H(G)$ имеет неподвижную точку. Это означает, что продолжения сторон многоугольника G пересекаются в одной точке. Переводя эту точку дробно-линейным преобразованием в бесконечность, получим многоугольник $\bar{G}$, ограниченный отрезками прямых.

Все преобразования группы $L(\bar{G})$ имеют вид $z \to az+b$. Все ростки функции $\bar{f} = f_{\bar{G}}$ в неособой точке c получаются применением к фиксированному ростку $\bar{f}_c$ группы $L(\bar{G})$, $\bar{f}_c \to a\bar{f}_c + b$. Росток $R_c = \bar{f}_c''/\bar{f}_c'$ инвариантен при действии группы $L(\bar{G})$. Значит, росток R_c есть росток однозначной функции. Особые точки b_j функции R_c могут быть лишь полюсами (см. утверждение из п. 3.1). Поэтому функция R_c рациональна. Уравнение $\bar{f}''/\bar{f}' = R$ интегрируется в квадратурах. Этот случай интегрируемости хорошо известен. Функция $\bar{f}$ в этом случае называется интегралом Кристоффеля—Шварца.

Рис. 1. Первый случай интегрируемости

Второй случай интегрируемости. Группа $H(G)$ имеет инвариантное множество, состоящее из двух точек. Это означает существование таких двух точек, что для каждой стороны многоугольника G точки или инверсионны относительно стороны, или лежат на ее продолжении. Переведем эти точки дробно-линейным преобразованием в нуль и в бесконечность. Мы получим многоугольник $\bar{G}$, ограниченный дугами окружностей с центрами в точке 0 и отрезками лучей, выходящих из точки 0 (см. рис. 2). Все преобразования группы $L(\bar{G})$ имеют вид $z \to az$, $z \to b/z$. Все ростки функции $\bar{f} = f_{\bar{G}}$ в неособой точке c получаются применением к фиксированному ростку $\bar{f}_c$ преобразований группы $L(\bar{G})$:

$$\bar{f}_c \to a\bar{f}_c, \quad \bar{f}_c \to b/\bar{f}_c.$$

Росток $R_c = (\bar{f}_c'/\bar{f}_c)^2$ инвариантен при действии группы $L(\bar{G})$ и является ростком однозначной функции R. Особенности функции R могут быть лишь полюсами (см. утверждение из п. 3.1), поэтому функция R рациональна. Уравнение $R = (\bar{f}'/\bar{f})^2$ интегрируется в квадратурах.

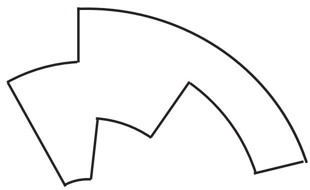
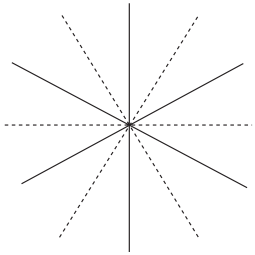


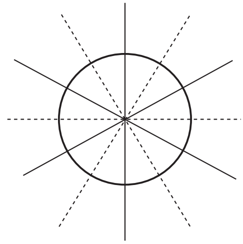
Рис. 2. Второй случай интегрируемости

Третий случай интегрируемости (см. рис. 3). Группа $H(G)$ конечна. Это означает, что многоугольник G дробно-линейным преобразованием переводится в многоугольник $\bar{G}$, стороны которого лежат на некоторой конечной сетке больших кругов. Группа $L(G)$ конечна, и, следовательно, функция f_G конечнозначна. Так как все особенности функции f_G степенного типа (см. утверждение из п. 3.1), то функция f_G есть алгебраическая функция.

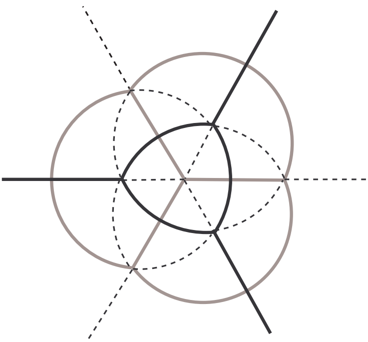
Остановимся на случае конечной разрешимой группы $H(G)$. Такой случай возможен, если и только если многоугольник G дробно-линейным преобразованием переводится в многоугольник $\bar{G}$, сто-



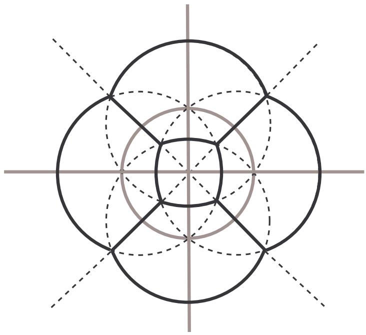
Сетка n-угольной пирамиды ($n=6$)



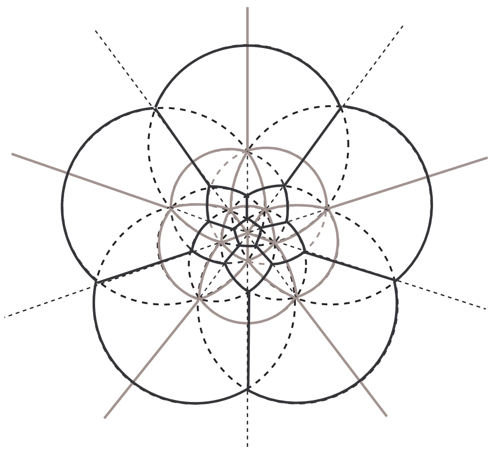
Сетка n-угольного диэдра ($n=6$)



Сетка тетраэдра



Сетка куба-октаэдра



Сетка додекаэдра-икосаэдра

Рис. 3.

роны которого лежат на конечной сетке, отличной от сетки додекаэдра-икосаэдра. В этом случае группа $L(G)$ разрешима. Применяя теорию Галуа, легко показать, что в этом случае функция f_G представляется через рациональные функции при помощи арифметических операций и радикалов.

Из наших результатов (см. п. 7.2 главы 5) вытекает

Теорема о многоугольниках, ограниченных дугами окружностей. *Для любого многоугольника G, не относящегося ни к одному из перечисленных выше трех случаев интегрируемости, функция f_G не только не представима в обобщенных квадратурах, но и не выражается через однозначные $\mathcal{S}$-функции при помощи обобщенных квадратур, суперпозиций и мероморфных операций.*

Глава 7

МНОГОМЕРНАЯ ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЛУА

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В топологической теории Галуа для функций одной переменной (см. главу 5) доказывается, что характер расположения римановой поверхности функции над комплексной прямой может препятствовать представимости этой функции в квадратурах. Это не только объясняет, почему многие дифференциальные уравнения не решаются в квадратурах, но и дает наиболее сильные известные результаты об их неразрешимости.

Мне всегда казалось, что полноценного многомерного варианта топологической теории Галуа не существует. Дело в том, что для построения такого варианта в случае многих переменных нужно было бы иметь информацию о продолжаемости ростков функций не только вне их множеств ветвления, но и вдоль таких множеств. А такую информацию взять вроде бы неоткуда. Только весной 1999 года я неожиданно заметил, что ростки функций временами автоматически продолжаются вдоль множества ветвления. Именно поэтому многомерная топологическая теория Галуа все-таки существует. Эта теория обсуждается в настоящей главе. В § 2 описывается свойство продолжаемости функций вдоль их множеств ветвления, которое, как мне кажется, представляет и самостоятельный интерес.

Пусть f — многозначная аналитическая функция на $\mathbb{C}^n$, для которой определена группа монодромии. Пусть $\pi\colon (Y, y_0) \to (\mathbb{C}^n, a)$ — аналитическое отображение многообразия Y в $\mathbb{C}^n$. Росток $\pi^*(f_a)_{y_0}$ может быть ростком многозначной функции на многообразии Y, для которой определена группа монодромии. Такая ситуация возможна, даже если точка a лежит в множестве особых точек функции f (некоторые из ростков многозначной функции f могут оказаться неособыми в особых точках этой функции) и многообразие Y отображается в это множество. Можно ли оценить группы монодромии индуцированной таким способом многозначной функции через группу монодромии исходной функции f (верно ли, например, что если группа монодромии функции f разрешима, то разрешима и группа монодромии каждой индуцированной из f функции)? В § 3 этот вопрос формулируется более точно и на него дается положительный ответ (см. п. 3.4, 3.5).

Описание связи группы монодромии исходной функции с группами монодромии индуцированных таким способом функций потребовало введения операции индуцированного замыкания групп (см. п. 3.2). В свою очередь, использование этой операции вынуждает пересмотреть определения различных классов пар групп (см. п. 3.5), встречающихся в одномерном варианте топологической теории Галуа (см. главу 5). В § 3 строятся определения, позволяющие работать с функциями многих переменных, имеющими всюду плотные множества особых точек и континуальные группы монодромии.

В главе 5 описан обширный класс бесконечнозначных функций одной переменной, для которых определена группа монодромии. Существует ли достаточно широкий класс ростков бесконечнозначных функций многих переменных (содержащий ростки функций, представимых в обобщенных квадратурах, и ростки целых функций многих переменных и замкнутый относительно естественных операций, таких как операция суперпозиции), обладающих аналогичным свойством? Долгое время я считал, что ответ на поставленный вопрос отрицателен. В § 4 определяется класс $\mathcal{S}\mathcal{C}$-ростков, дающий положительный ответ на этот вопрос. Доказательство использует результаты о продолжаемости многозначных аналитических функций вдоль их множеств ветвления (см. § 2).

Основная теорема (см. п. 4.5) описывает изменения групп монодромий $\mathcal{S}\mathcal{C}$-ростков, которые происходят в результате применения к росткам естественных операций. Она очень близка к соответствующей одномерной теореме (см. § 6 главы 5), но использует также новые результаты аналитического (см. § 2) и теоретико-группового (см. § 3) характера. Как следствие получаются топологические результаты о неразрешимости уравнений в явном виде, более сильные, чем аналогичные классические теоремы.

В п. 1.1 определяются операции над многозначными функциями многих переменных (которые понимаются в немного более ограниченном смысле, чем операции над многозначными функциями одной переменной). В п. 1.2–1.4 определяются лиувиллевские классы функций и расширения Лиувилля дифференциальных функциональных полей для случая функций многих переменных.

1.1. Операции над многозначными функциями многих переменных. Операции над многозначными функциями в настоящей главе понимаются как операции над их однозначными ростками (ср. п. 2.2 введения к этой книге). Пусть фиксирован класс основных функций и запас допустимых операций. Выражается ли заданная функция (являющаяся, скажем, решением данного алгебраического или дифференциального уравнения или возникшая из каких-либо других соображений) через основные функции с помощью допустимых операций? Нас интересуют различные *однозначные ветви* многозначных функций над различными областями. Каждую функцию, даже если она является многозначной функцией, мы будем рассматривать как совокупность всех ее однозначных ветвей. Мы будем применять допустимые операции (такие как арифметические операции или операцию взятия суперпозиции) лишь к однозначным ветвям функций над различными областями. Так как мы имеем дело с аналитическими функциями, то в качестве областей достаточно рассматривать лишь малые окрестности точек.

Вопрос теперь видоизменяется следующим образом: *выражается ли заданный росток функции в заданной точке через ростки основных функций при помощи допустимых операций?* Конечно, ответ зависит от выбора точки и от выбора однозначного ростка в этой точке заданной многозначной функции. Однако оказывается, что (для интересующих нас классов функций) либо искомого выражения не существует ни для какого ростка заданной многозначной функции ни в какой точке, либо, наоборот, «одно и то же» представление обслуживает все ростки заданной многозначной функции почти в любой точке пространства. В первом случае мы будем говорить, что *никакая ветвь заданной многозначной функции не выражается через ветви основных функций при помощи допустимых операций*. Во втором случае мы будем говорить, что такое выражение *существует*. В этой главе операции над многозначными функциями многих переменных будут пониматься в только что описанном смысле.

Для функций одной переменной мы пользовались другим, более расширенным определением операций над многозначными функциями, в котором многозначная функция воспринимается как единый объект (см. п. 2.1 введения к настоящей книге). Оно, в сущности, эквивалентно добавлению операции аналитического продолжения к числу допустимых операций над аналитическими ростками. Для функций многих переменных приходится принять описанное выше более ограничительное понимание операций над многозначными функциями, которое, впрочем, не менее (а может быть, даже более) естественно.

1.2. Лиувиллевские классы функций многих переменных. В п. 1.2–1.4 определяются лиувиллевские классы функций и расширения Лиувилля функциональных дифференциальных полей для случая функций многих переменных. Эти классы и расширения определяются так же, как соответствующие классы и расширения полей функций одной переменной (см. п. 2.2 введения к настоящей книге и § 1 главы 1). Разница лишь в деталях.

Мы считаем, что фиксирована цепочка стандартных координатных пространств возрастающих размерностей $0 \subset \mathbb{C}^1 \subset \ldots \subset \mathbb{C}^n \subset \ldots$ с координатными функциями $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ (для каждого $k > 0$ функции $x_1, \ldots, x_k$ — координатные функции в $\mathbb{C}^k$). Ниже мы определяем лиувиллевские классы функций для каждого стандартного координатного пространства $\mathbb{C}^k$.

Функции от n переменных, представимые в радикалах

Список основных функций: все комплексные константы, все координатные функции каждого стандартного координатного пространства.

Список допустимых операций: арифметические операции и операции извлечения корня $\sqrt[m]{f}$ степени m, $m = 2, 3, \ldots$, из заданной функции f.

Функция от n переменных, представимая в радикалах, — это любая функция от переменных $x_1, \ldots, x_n$, которую можно получить из перечисленных выше основных функций при помощи перечисленных выше допустимых операций.

Функция

$$g(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[3]{5x_1 + 2\sqrt[2]{x_2}} + \sqrt[7]{x_3^3 + 3}$$

доставляет пример функции трех переменных, представимой в радикалах.

Для определения остальных классов нам понадобится список основных элементарных функций.

Список основных элементарных функций:

1. Все комплексные константы и все координатные функции $x_1, \ldots, x_n$ каждого стандартного координатного пространства $\mathbb{C}^n$.

2. Экспонента, логарифм и степенная функции x^α, где α — любая комплексная константа.

3. Тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс, котангенс.

4. Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс.

Перейдем теперь к списку классических операций над функциями. Здесь приводится начало списка. Он будет продолжен в п. 1.3.

Список классических операций:

1. *Операция суперпозиции*, сопоставляющая функции f от k переменных и функциям $g_1, \ldots, g_k$ от n переменных функцию $f(g_1, \ldots, g_k)$ от n переменных.

2. *Арифметические операции*, сопоставляющие функциям f и g функции $f+g$, $f-g$, fg и f/g.

3. *Операции дифференцирования по независимым переменным*, для функций от n переменных имеется n таких операций: i-я операция сопоставляет функции f от переменных $x_1, \ldots, x_n$ функцию $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

4. *Операция интегрирования*, сопоставляющая k функциям $f_1, \ldots, f_k$ от переменных $x_1, \ldots, x_k$, для которых форма $\alpha = f_1\,dx_1 + \ldots + f_k\,dx_k$ замкнута, неопределенный интеграл y формы α (т. е. любую функцию y, такую что $dy = \alpha$). По функциям $f_1, \ldots, f_k$ функция y определяется с точностью до аддитивной постоянной).

5. *Операция решения алгебраического уравнения*, сопоставляющая функциям $f_1, \ldots, f_n$ функцию y, такую что $y^n + f_1 y^{n-1} + \ldots + f_n = 0$. По функциям $f_1, \ldots, f_n$ функция y определена не вполне однозначно, так как алгебраическое уравнение степени n может иметь n решений.

6. *Операция взятия экспоненты интеграла*, сопоставляющая k функциям $f_1, \ldots, f_k$ от переменных $x_1, \ldots, x_k$, для которых форма $\alpha = f_1\,dx_1 + \ldots + f_k\,dx_k$ замкнута, экспоненту z от неопределенного интеграла y формы α (т. е. любую функцию z, такую что $dz = \alpha z$). По функциям $f_1, \ldots, f_k$ функция z определяется с точностью до мультипликативной постоянной.

Вернемся теперь к определению лиувиллевских классов функций от n переменных.

Элементарные функции от n переменных.

Список основных функций: основные элементарные функции.

Список допустимых операций: суперпозиции, арифметические операции, дифференцирование.

Элементарная функция от n переменных — это любая функция от переменных $x_1, \ldots, x_n$, которую можно получить из перечисленных выше основных функций при помощи перечисленных выше допустимых операций. Элементарные функции записываются формулами, например следующей:

$$f(x_1, x_2) = \operatorname{arctg}(\exp(\sin x_1) + \cos x_2).$$

Аналогично определяются и остальные лиувиллевские классы функций. При определении этих классов ограничимся списками основных функций и допустимых операций.

Функции от n переменных, представимые в квадратурах.

Список основных функций: основные элементарные функции.

Список допустимых операций: суперпозиции, арифметические операции, дифференцирования, интегрирование.

Обобщенные элементарные функции от n переменных. Этот класс функций определяется в точности так же, как класс элементарных функций. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений.

Функции от n переменных, представимые в обобщенных квадратурах. Этот класс функций определяется в точности так же, как класс функций, представимых в квадратурах. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений.

Функции от n переменных, представимые в k-радикалах. Этот класс функций определяется в точности так же, как класс функций, представимых в радикалах. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений степени не выше k.

Функции от n переменных, представимые в k-квадратурах. Этот класс функций определяется в точности так же, как класс функций, представимых в квадратурах. Нужно лишь к списку допустимых операций добавить операцию решения алгебраических уравнений степени не выше k.

1.3. Новые определения лиувиллевских классов функций многих переменных. Все основные элементарные функции сводятся к логарифму и к экспоненте (см. лемму 2.1 из главы 1). Суперпозиции $y = \exp f$ и $z = \ln f$ можно рассматривать как решения уравнений $dy = y\,df$ и $dz = df/f$. Таким образом, внутри лиувиллевских классов функций вместо абсолютно неалгебраической операции суперпозиции достаточно рассматривать операции решения простых дифференциальных уравнений. После этого задача о разрешимости в лиувиллевских классах функций становится дифференциально-алгебраической и переносится на абстрактные дифференциальные поля.

Продолжим начатый в п. 1.2 список классических операций.

7. *Операция взятия экспоненты*, сопоставляющая функции f функцию $\exp f$.

8. *Операция взятия логарифма*, сопоставляющая функции f функцию $\ln f$.

Приведем теперь новые определения трансцендентных лиувиллевских классов функций от n переменных.

Элементарные функции от n переменных.

Список основных функций: все комплексные константы, все координатные функции каждого стандартного координатного пространства.

Список допустимых операций: взятие экспоненты, взятие логарифма, арифметические операции, дифференцирования.

Функции от n переменных, представимые в квадратурах.

Список основных функций: все комплексные константы.

Список допустимых операций: взятие экспоненты, арифметические операции, дифференцирования, интегрирование.

Обобщенные элементарные функции от n переменных и функции от n переменных, представимые в обобщенных квадратурах, k-квадратурах и k-радикалах, определяются так же, как соответствующие необобщенные классы функций, нужно лишь к списку допустимых операций добавить, соответственно, операцию решения алгебраических уравнений или операцию решения алгебраических уравнений степени не выше k.

Справедливо следующее утверждение.

Для каждого из трансцендентных лиувиллевских классов функций новое и старое определения (см. настоящий параграф и п. 1.2) *эквивалентны.*

Мы не будем доказывать это утверждение: оно доказывается так же, как теорема 1.2 из главы 1.

Поле K называется полем *с n коммутирующими дифференцированиями,* если задано n аддитивных отображений $\delta_i: K \to K$, $i=1, \ldots, n$, удовлетворяющих соотношению Лейбница $\delta_i(ab)=(\delta_i a)b+a(\delta_i b)$ и коммутирующих между собой: $\delta_i\delta_j=\delta_j\delta_i$. Ниже поле, снабженное n коммутирующими дифференцированиями, мы будем называть дифференциальным полем (если подобное сокращение не приводит к недоразумениям).

Элемент y дифференциального поля K называется *константой,* если $\delta_i y=0$ для $i=1, \ldots, n$. Все константы образуют подполе, которое называется полем *констант*. Во всех интересующих нас случаях полем констант является поле комплексных чисел. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что *дифференциальное поле имеет в качестве поля констант поле комплексных чисел*. Элемент y дифференциального поля называется: *экспонентой* элемента a, если $\delta_i y=y\delta_i a$ для $i=1, \ldots, n$; *экспонентой интеграла* набора элементов $a_1, \ldots, a_n$, если $\delta_i y=a_i y$ для $i=1, \ldots, n$; *логарифмом* элемента a, если $\delta_i y=\delta_i a/a$ для $i=1, \ldots, n$; *интегралом* набора элементов $a_1, \ldots, a_n$, если $\delta_i y=a_i$ для $i=1, \ldots, n$.

Пусть дифференциальное поле K и множество M лежат в некотором дифференциальном поле F. *Присоединением* к дифференциальному полю K множества M называется минимальное дифференциальное поле $K\langle M\rangle$, содержащее поле K и множество M.

Дифференциальное поле F, содержащее дифференциальное поле K и имеющее то же поле констант, называется *элементарным расширением* поля K, если существует цепочка дифференциальных полей $K=F_1\subseteq \ldots \subseteq F_N=F$, в которой при каждом $i=1, \ldots, N-1$ поле $F_{i+1}=F_i\langle x_i\rangle$ получается присоединением к полю F_i элемента x_i, причем x_i — экспонента или логарифм некоторого элемента a_i поля F_i. Элемент $a\in F$ называется *элементарным* над K, $K\subset F$, если он содержится в каком-либо элементарном расширении поля K.

Обобщенное элементарное расширение, расширение Лиувилля, обобщенное расширение Лиувилля и *k-расширение Лиувилля* поля K

определяются аналогично. При построении обобщенных элементарных расширений допускаются присоединения экспонент, логарифмов и алгебраические расширения. При построении расширений Лиувилля допускаются присоединения интегралов и экспонент интегралов наборов элементов дифференциального поля, построенного на предыдущем шаге. В обобщенных расширениях Лиувилля и k-расширениях Лиувилля кроме этого допускаются соответственно алгебраические расширения и присоединения решений алгебраических уравнений степени не выше k. Элемент $a \in F$ называется *обобщенно-элементарным* над K, $K \subset F$ (*представимым в квадратурах, в обобщенных квадратурах, в k-квадратурах* над K), если a содержится в каком-либо обобщенном элементарном расширении (расширении Лиувилля, обобщенном расширении Лиувилля, k-расширении Лиувилля) поля K.

1.4. Расширения Лиувилля дифференциальных полей, состоящих из функций многих переменных. Перейдем к функциональным дифференциальным полям, элементами которых являются функции от n переменных. Именно с такими полями мы будем иметь дело в настоящей главе.

Всякое подполе K поля всех мероморфных функций в связной области U пространства $\mathbb{C}^n$, содержащее все комплексные константы и замкнутое относительно дифференцирования по каждой переменной (т. е. если $f \in K$, то $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in K$ для $i = 1, \ldots, n$), доставляет пример функционального дифференциального поля, снабженного n коммутирующими дифференцированиями.

Дадим теперь общее определение. Пусть V, v — пара, состоящая из связного n-мерного аналитического многообразия V и из n коммутирующих мероморфных векторных полей $v = v_1, \ldots, v_n$ на нем. Производная Ли L_{v_i} вдоль векторного поля v_i действует на поле F всех мероморфных функций на многообразии V и задает дифференцирование $\delta_i f = L_{v_i} f$ в этом поле. *Функциональное дифференциальное поле* — это любое дифференциальное подполе поля F, содержащее все комплексные константы.

Для *расширения функциональных полей* полезна следующая конструкция. Пусть K — некоторое подполе поля мероморфных функций на связном многообразии V, снабженном n коммутирующими мероморфными векторными полями $v = v_1, \ldots, v_n$, дифференцирование вдоль которых не выводит из поля K (т. е. если $f \in K$, то $L_{v_i} f \in K$). Рассмотрим любое связное многообразие W вместе с аналитическим отображением $\pi\colon W \to V$, являющимся локальным гомеоморфизмом. Фиксируем на W мероморфные векторные поля $w = w_1, \ldots, w_n$, такие что $v_i = d(\pi) w_i$. Дифференциальное поле F всех мероморфных функций на W с дифференцированиями $\delta_i = L_{w_i}$ содержит дифференциальное подполе $\pi^* K$, состоящее из функций вида $\pi^* f$, где $f \in K$. Дифференциальное поле $\pi^* K$ изоморфно дифференциальному полю K, и оно лежит внутри дифференциального поля F. Если удачно подобрать многообразие W, то расширение поля $\pi^* K$, изоморфного полю K, можно произвести внутри поля F.

Пусть требуется расширить поле K, скажем, интегралом y некоторого набора функций $f_1, \ldots, f_n \in K$. Это можно сделать следующим образом. Поскольку векторные поля $w_1, \ldots, w_n$ мероморфны и коммутируют, на W существуют мероморфные 1-формы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, определенные соотношениями $\alpha_i(w_j) = 0$ при $i \neq j$ и $\alpha_i(w_i) = 1$. Форма $\alpha = f_1 \alpha_1 + \ldots + f_n \alpha_n$ должна быть замкнутой (иначе интеграл y не может существовать), и y является неопределенным интегралом формы α.

Над многообразием V можно рассмотреть риманову поверхность W неопределенного интеграла y формы $f\alpha$. По самому определению римановой поверхности W существует естественная проекция $\pi\colon W \to V$ и функция y является однозначной мероморфной функцией на поверхности W. Дифференциальное поле F мероморфных функций на W с операциями дифференцирования вдоль векторных полей $w_i = d^{-1}(\pi) v_i$ содержит как элемент y, так и поле $\pi^* K$, изоморфное полю K. Поэтому расширение $\pi^* K\langle y \rangle$ определено и является подполем дифференциального поля F. Именно эту конструкцию расширения мы имеем в виду, когда говорим о расширениях функциональных дифференциальных полей.

Эта же конструкция позволяет присоединить к функциональному дифференциальному полю K логарифм или экспоненту от любой функции f из поля K и интеграл или экспоненту интеграла от любого набора функций $f_1, \ldots, f_n$, для которого форма $\alpha = f_1 \alpha_1 + \ldots + f_n \alpha_n$ замкнута. Для любых функций $f_1, \ldots, f_n \in K$ можно таким способом присоединить к K решение y алгебраического уравнения $y^n +$

$+ f_1 y^{n-1} + \ldots + f_n = 0$ или все решения $y_1, \ldots, y_n$ этого уравнения (присоединение всех решений $y_1, \ldots, y_n$ можно осуществить на римановой поверхности вектор-функции $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$). Таким же способом можно присоединить к K конечномерное пространство над $\mathbb{C}$ всех решений любой голономной системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами в поле K. (Напомним, что росток любого решения системы голономных линейных дифференциальных уравнений аналитически продолжается вдоль кривой на многообразии V, не проходящей через некоторое аналитическое подмногообразие коразмерности один в многообразии V.)

Итак, *все упомянутые выше расширения функциональных дифференциальных полей можно осуществить, не выходя из класса функциональных дифференциальных полей*. Говоря о расширениях функциональных дифференциальных полей, мы всегда имеем в виду именно эту процедуру.

Дифференциальное поле, состоящее из всех комплексных констант, и дифференциальное поле, состоящее из всех рациональных функций от n переменных, можно рассматривать как дифференциальные поля функций, определенных на пространстве $\mathbb{C}^n$. Так же, как и в одномерном случае, проверяются следующие утверждения.

Функция n комплексных переменных (*возможно, многозначная*) *принадлежит*

1) *классу элементарных функций, если и только если она принадлежит некоторому элементарному расширению поля всех рациональных функций n переменных*;

2) *классу обобщенных элементарных функций, если и только если она принадлежит некоторому обобщенному элементарному расширению поля рациональных функций n переменных*;

3) *классу функций, представимых в квадратурах, если и только если она принадлежит некоторому расширению Лиувилля поля всех комплексных констант*;

4) *классу функций, представимых в k-квадратурах, если и только если она принадлежит некоторому k-расширению Лиувилля поля всех комплексных констант*;

5) *классу функций, представимых в обобщенных квадратурах, если и только если она принадлежит обобщенному расширению Лиувилля поля всех комплексных констант.*

§ 2. О продолжаемости многозначных аналитических функций на аналитическое подмножество

Пусть M — аналитическое многообразие и Σ — аналитическое подмножество в нем. Пусть в точке $b \in M$ задан росток f_b аналитической функции, который аналитически продолжается вдоль любой кривой $\gamma\colon [0,1] \to M$, $\gamma(0)=b$, пересекающей множество Σ лишь, может быть, в начальный момент. Что можно сказать о продолжаемости ростка f_b вдоль кривых, которые, начиная с некоторого момента, лежат в Σ? Этим вопросом мы и будем заниматься. В п. 2.1 мы рассмотрим классический случай, в котором дополнительно известно, что продолжения ростка f_b задают однозначную аналитическую функцию в множестве $M \setminus \Sigma$. В этом случае единственным препятствием к продолжаемости ростка f_b выступают неприводимые компоненты множества Σ, которые имеют коразмерность один в многообразии M и замыкания которых не содержат заданной точки b (см. утверждение 2.3, являющееся вариантом теорем Римана и Гартогса о продолжаемости аналитических функций). Росток f_b продолжается в дополнение к объединению таких компонент и, вообще говоря, не продолжается дальше. Однако, как показывает следующий простейший пример, этот результат не переносится непосредственно на случай многозначных функций.

Пример. Рассмотрим общее кубическое уравнение

$$y^3 + py + q = 0$$

с нулевым коэффициентом при члене y^2. Это уравнение в дополнении к дискриминантной кривой Σ определяет трехзначную аналитическую функцию $y(p,q)$. Дискриминантная кривая этого уравнения является полукубической параболой — неприводимой кривой, имеющей единственную особую точку в начале координат. В начале координат все три корня кубического уравнения совпадают, и это единственная точка плоскости p, q, обладающая этим свойством. Над множеством $\Sigma \setminus \{0\}$ сливаются ровно два корня уравнения. Пусть b — любая точка плоскости, лежащая в дополнении к дискриминантной кривой, a — любая точка, лежащая на дискриминантной кривой и отличная от начала координат, $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^2$ — любая кривая, начинающаяся в точке b, заканчивающаяся в точке a и пересекающая Σ лишь в последний момент, $\gamma(0)=b$, $\gamma(1)=a$, $\gamma(t) \notin \Sigma$

при $t \neq 1$. Выберем тот из ростков функции $y(p,q)$ над точкой b, который при продолжении вдоль кривой γ при подходе к точке a не сливается ни с каким другим ростком. Такой росток ровно один. Обозначим его f_b. Росток f_b, во-первых, аналитически продолжается вдоль любой кривой, не пересекающей Σ. Во-вторых, он продолжается до точки $a \in \Sigma$ вдоль кривой γ. В-третьих, росток f_a, полученный при таком продолжении, аналитически продолжается вдоль любой кривой, лежащей в множестве Σ и не проходящей через начало координат. В начале координат нет ни одного аналитического ростка функции $y(p,q)$. В этом примере препятствием к продолжаемости ростка вдоль кривой Σ является точка 0. В этой точке к кривой Σ не подходит никакая другая ветвь дискриминанта, но меняется локальная топология кривой Σ (в нуле полукубическая парабола Σ имеет особенность, в остальных точках она гладкая).

Приведенный пример подсказывает следующее естественное предположение. Пусть B — некоторый страт (аналитическое подмногообразие), лежащий в множестве Σ и содержащий точку a. Пусть росток аналитической функции f_a аналитически продолжается вдоль любой кривой, пересекающей множество Σ лишь, может быть, в начальный момент. Тогда если топология пары (Σ, B) при движении вдоль кривой $\gamma(t) \in B$, $\gamma(0) = a$, не меняется, то росток f_a аналитически продолжается вдоль такой кривой.

Это предположение действительно оказывается верным. Сначала в п. 2.3 мы доказываем его для функций f, однозначных в дополнении $M \setminus \Sigma$ к множеству Σ в многообразии M. Согласно результату п. 2.1 нам достаточно показать, что при пересечении страта B с замыканием неприводимой компоненты Σ коразмерности 1 изменяется топология пары (Σ, B). В доказательстве мы существенно используем результаты Уитни о существовании аналитических стратификаций аналитических множеств, которые хорошо согласуются с топологией. Эти результаты Уитни напоминаются в п. 2.2. Случай многозначной в $M \setminus \Sigma$ функции f несложной топологической конструкцией сводится к случаю, когда функция f однозначна (см. п. 2.6). Эта топологическая конструкция обобщает классическую конструкцию локально тривиального накрытия (см. п. 2.4) и тоже существенно использует стратификацию Уитни (см. п. 2.5.)

2.1. Продолжаемость однозначной аналитической функции на аналитическое подмножество. Представим пространство $\mathbb{C}^n$ в виде прямого произведения $(n-1)$-мерного пространства $\mathbb{C}^{n-1}$ и комплексной прямой $\mathbb{C}^1$. Будем отождествлять пространство $\mathbb{C}^{n-1}$ с гиперплоскостью $z=0$, где z — одна из координатных функций в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Лемма 2.1. *Пусть окрестность U начала координат в пространстве $\mathbb{C}^n$ является прямым произведением связной окрестности U_1 в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$ на связную окрестность U_2 в комплексной прямой $\mathbb{C}^1$, $U=U_1\times U_2$. Тогда любая функция f, аналитическая в дополнении к гиперплоскости $z=0$ в окрестности U и ограниченная в некоторой окрестности начала координат, аналитически продолжается на всю окрестность U.*

Доказательство. Лемма вытекает из интегральной формулы Коши. Действительно, определим функцию $\tilde f$ на области U при помощи интеграла Коши

$$\tilde f(x,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(x,z)}\frac{f(x,u)\,du}{u-z},$$

где x и z — точки в областях U_1 и U_2, $f(x,u)$ — заданная функция и $\gamma(x,z)$ — контур интегрирования, лежащий в области U на комплексной прямой $\{x\}\times\mathbb{C}^1$, охватывающий точки (x,z) и $(x,0)$ и непрерывно зависящий от точки (x,z). Функция $\tilde f(x,z)$ задает искомое аналитическое продолжение. Действительно, функция $\tilde f$ аналитична во всей области U. В окрестности начала координат она, согласно теореме Римана об устранимой особенности, совпадает с заданной функцией f. □

Утверждение 2.2. *Пусть M — n-мерное комплексное аналитическое многообразие, Σ — аналитическое подмножество в M, $a\in\Sigma$ — такая точка в этом подмножестве, что всякая неприводимая компонента множества Σ, имеющая размерность $n-1$, содержит точку a. Тогда любая функция f, аналитическая в дополнении $M\setminus\Sigma$ к множеству Σ в многообразии M и ограниченная в некоторой окрестности точки a, аналитически продолжается на все многообразие M.*

Доказательство. Утверждение 2.2 сводится к лемме 2.1. Действительно, обозначим через Σ_H подмножество множества Σ, определенное следующим условием: в окрестности каждой точки множества Σ_H аналитическое множество Σ является неособой $(n-1)$-мерной аналитической гиперповерхностью в многообразии M. Пересечение всякой неприводимой $(n-1)$-мерной компоненты D_i множества Σ с множеством Σ_H является связным $(n-1)$-мерным многообразием. Докажем, что функция f аналитически продолжается на множество $D_i \cap \Sigma_H$.

Обозначим через A_i подмножество в $D_i \cap \Sigma_H$, на которое аналитически продолжается функция f. Очевидно, что A_i открыто в топологии множества $D_i \cap \Sigma_H$. Множество A_i непусто, так как по теореме Римана о продолжении голоморфной функции (см. [36]) оно содержит все неособые точки компоненты D_i, достаточно близкие к точке a. Покажем, что A_i замкнуто в топологии множества $D_i \cap \Sigma_H$. Действительно, пусть b — предельная точка этого множества. По определению множества $D_i \cap \Sigma_H$ около точки b в многообразии M можно выбрать такую локальную систему координат, что множество $D_i \cap \Sigma_H$ в этой окрестности будет совпадать с координатной гиперплоскостью. Нужный факт теперь вытекает из леммы 2.1. Далее, в силу связности множества $D_i \cap \Sigma_H$ получаем, что множество A_i совпадает с множеством $D_i \cap \Sigma_H$, т. е. что функция f аналитически продолжается на все это множество. Поэтому функция f продолжается на все множество $\Sigma_H = \bigcup (D_i \cap \Sigma_H)$. Но множество $\Sigma \setminus \Sigma_H$ имеет в многообразии M коразмерность не менее двух. Согласно теореме Гартогса (см. [36]) утверждение 2.2 доказано. □

Утверждение 2.3. *Пусть f — аналитическая функция в дополнении к аналитическому множеству Σ в n-мерном аналитическом многообразии M. Если функция f ограничена в некоторой окрестности точки $a \in \Sigma$, то она аналитически продолжается на множество $M \setminus D_a$, где D_a — объединение всех $(n-1)$-мерных неприводимых компонент множества Σ, не содержащих точку a.*

Доказательство. Утверждение 2.3 вытекает из утверждения 2.2, примененного к многообразию $M \setminus D_a$, аналитическому подмножеству $\Sigma \setminus D_a$ и функции f. □

2.2. Допустимые стратификации. Пусть Σ — собственное аналитическое подмножество в комплексно-аналитическом многообразии M. *Стратификацией* множества Σ называется его разбиение на непересекающиеся подмногообразия, называемые *стратами* (имеющие, вообще говоря, различные размерности), обладающее следующими свойствами:

1) каждый страт Σ_i является связным аналитическим многообразием;

2) замыкание $\overline{\Sigma}_i$ каждого страта Σ_i является аналитическим подмножеством в M, причем граница $\overline{\Sigma}_i \setminus \Sigma_i$ представляется в виде объединения некоторых стратов меньшей размерности.

Пара, состоящая из аналитического многообразия M и его аналитического подмножества Σ, имеет *постоянную топологию вдоль страта* $B \subset \Sigma$, если выполнены следующие два условия.

Условие 1. Для всякой точки $a \in B$ и всякого аналитического подмногообразия L многообразия M, трансверсального к страту B в точке a, существует малая окрестность V_a точки a в многообразии L, для которой топология пары (V_a, F_a), где $F_a = V_a \cap \Sigma$, не зависит ни от выбора точки a, ни от выбора сечения L, а определяется лишь стратом B и подмножеством Σ.

Условие 2. У страта B существуют окрестность U в многообразии M вместе с проекцией $\pi\colon U \to B$, ограничение которой на множество $B \subset U$ является тождественным отображением, такие что для каждой точки $a \in B$ пара $(\pi^{-1}(a), \pi^{-1}(a) \cap \Sigma)$ гомеоморфна паре (V_a, F_a). Более того, для каждой точки $a \in B$ существует окрестность K_a в многообразии B, такая что пара $(\pi^{-1}(K_a), \pi^{-1}(K_a) \cap \Sigma)$ гомеоморфна паре $(V_a \times K_a, F_a \times K_a)$, причем гомеоморфизм, связывающий эти две пары, переводит проекцию π в проекцию прямого произведения $V_a \times K_a$ на сомножитель K_a, а ограничение этого гомеоморфизма на множество $K_a \subset \pi^{-1}(K_a)$ является тождественным отображением (точнее, переводит точку $b \in K_a$ в точку $a \times b$ в прямом произведении $V_a \times K_a$).

Скажем, что стратификация аналитического множества $\Sigma \subset M$ является *допустимой*, если пара (M, Σ) имеет постоянную топологию вдоль всякого страта Σ_i этой стратификации.

Как открыл Уитни, допустимые стратификации существуют для любого комплексно-аналитического множества в любом комплексно-аналитическом многообразии (см. [14]). Мы будем использовать этот результат.

2.3. Изменение топологии аналитического множества при подходе к неприводимой компоненте. Согласно следующей лемме 2.4 вещественное топологическое подмногообразие в M, лежащее в аналитической гиперповерхности Σ и отличающееся от этой гиперповерхности множеством малой размерности, имеет ровно столько же компонент связности, сколько неприводимых $(n-1)$-мерных компонент имеется в гиперповерхности Σ.

Лемма 2.4. *Пусть подмножество T аналитического $(n-1)$-мерного множества Σ, лежащего в n-мерном аналитическом многообразии M, обладает следующими свойствами.*

1. *Множество T является вещественным топологическим подмногообразием в многообразии M коразмерности 2, т. е. у каждой точки $a \in T$ существует такая окрестность U_a в многообразии M, что множество $U_a \cap T$ является топологическим подмногообразием в области U_a вещественной размерности $2n-2$.*

2. *Множество $\Sigma \setminus T$ является замкнутым подмножеством в Σ вещественной коразмерности не меньше 2 (т. е. является объединением конечного числа вещественных топологических подмногообразий в M размерностей не выше $2n-4$).*

Тогда каждая из $(n-1)$-мерных неприводимых компонент множества Σ пересекается ровно с одной компонентой связности топологического многообразия T. При этом каждая компонента связности многообразия T всюду плотна в соответствующей неприводимой $(n-1)$-мерной компоненте аналитического множества Σ.

Доказательство. Лемма 2.4 вытекает из следующих фактов: а) множество коразмерности 2 не может разделять топологическое многообразие, б) если из неприводимой компоненты аналитического множества удалить все его особые точки, то останется связное многообразие.

Покажем сначала, что всякая компонента связности T^0 множества T пересекается ровно с одной неприводимой компонентой множества Σ. Действительно, множество $\Sigma \setminus \Sigma_H$ имеет вещественную размерность не выше $2n-4$, следовательно, оно не может делить связное $(2n-2)$-мерное вещественное многообразие T^0 на части. Поэтому дополнение множества T^0 до его пересечения с множеством $\Sigma \setminus \Sigma_H$ покрывается ровно одним множеством $D_i \cap \Sigma_H$. Так как множество $D_i \setminus \Sigma_H$ всюду плотно в компоненте D_i и множество D_i замкнуто, то множество T^0 целиком содержится в неприводимой компоненте D_i множества Σ. Допустим, что некоторая точка a множества T^0 принадлежит и другой $(n-1)$-мерной компоненте D_j, $D_j \neq D_i$, множества Σ. Но по условию множество T, а следовательно, и его компонента T^0 открыты в топологии множества Σ. Так как множество $D_j \cap \Sigma_H$ всюду плотно в D_j, множество T^0 будет содержать точки множества $D_j \cap \Sigma_H$, что невозможно. Противоречие доказывает нужное утверждение.

Покажем теперь, что различные компоненты связности многообразия T не могут лежать в одной и той же $(n-1)$-мерной неприводимой компоненте множества Σ. Действительно, если из неприводимой $(n-1)$-мерной компоненты удалить все ее особые точки и точки, не принадлежащие многообразию T, то останется связное многообразие. Следовательно, оно покрывается ровно одной компонентой связности многообразия T. Лемма доказана. $\square$

Утверждение 2.5. *Пусть пара, состоящая из n-мерного аналитического многообразия и его аналитического подмножества* Σ, *имеет постоянную топологию вдоль связного страта* $B \subset \Sigma$ (см. п. 2.2). *Тогда каждая* $(n-1)$*-мерная неприводимая компонента множества* Σ *либо не пересекается со стратом B, либо содержит его целиком.*

Доказательство. Рассмотрим сначала локальный случай. Предположим, что многообразие B совпадает с множеством K_a, а многообразие M совпадает с его окрестностью $\pi^{-1}(K_a)$ (в обозначениях условия 2 из п. 2.2). Покажем, что в этом случае замыкание каждой неприводимой $(n-1)$-мерной компоненты множества Σ совпадает с множеством K_a.

Мы будем использовать обозначения из этого пункта. Пусть $F_a^0 \subset \subset F_a$ — множество, состоящее из точек аналитического множества F_a, в окрестности которых множество F_a является аналитической гиперповерхностью в многообразии V_a. Множество F_a^0 распадается на компоненты связности $F_a^{0,i}$. Дополнение $F_a \setminus F_a^0$ имеет меньшую комплексную размерность, чем множество F_a.

Гомеоморфизм, о котором идет речь в условии 2, переводит множество F_a^0 в множество Σ. Из леммы 2.4 вытекает, что этот гомеоморфизм переводит множества $F_a^{0,i} \times K_a$ в различные неприводимые $(n-1)$-мерные компоненты множества Σ, причем образ каждого из множеств $F_a^{0,i} \times K_a$ всюду плотен в соответствующей неприводимой компоненте множества Σ, и в каждую из $(n-1)$-мерных компонент множества Σ отобразится некоторое множество $F_a^{0,i} \times K_a$.

Далее, для каждой компоненты связности $F_a^{0,i}$ точка a является предельной (компоненты, для которых это не так, не пересекаются с достаточно малой окрестностью точки a и не входят в множество F_a^0). Поэтому замыкание каждого из множеств $F_a^{0,i} \times K_a$ содержит множество K_a. Следовательно, каждая из неприводимых $(n-1)$-мерных компонент множества Σ содержит множество K_a (гомеоморфизм, о котором идет речь в условии 2 из п. 2.2, тождествен на базе K_a).

Локальный случай разобран. Предположим теперь, что многообразие M находится в малой окрестности страта B. Именно, пусть многообразие M совпадает с окрестностью U страта B, о котором идет речь в условии 2. В этом случае страт B покрывается областями K_{a_j}. В каждой из таких областей действует предыдущее рассуждение. Поэтому если неприводимая $(n-1)$-мерная компонента D_i множества Σ пересекает множество $\pi^{-1}(K_{a_j})$, то ее замыкание содержит всю окрестность K_{a_j}. Итак, множество предельных точек компоненты D_i, лежащих в страте B, является открытым в топологии страта B. Но это множество, очевидно, является замкнутым в топологии страта B. Поэтому, так как страт B связен, он должен содержаться в замыкании компоненты D_i.

Перейдем теперь к общему случаю.

Если неприводимая $(n-1)$-мерная компонента множества Σ не пересекает окрестность U страта B, о котором идет речь в условии 2, то страт B не содержит предельных точек этой компоненты. Если же она пересекает область U, то действует предыдущее рассуждение, согласно которому замыкание компоненты содержит весь страт B.

Утверждение доказано. □

Теорема 2.6. *Пусть пара, состоящая из n-мерного многообразия M и его аналитического подмножества Σ, имеет постоянную топологию вдоль связного страта $B \subset \Sigma$. Тогда любая функция f, аналитическая в дополнении $M \setminus \Sigma$ к множеству Σ в многообразии M, которая ограничена в некоторой окрестности точки $a \in B$, аналитически продолжается на окрестность страта B.*

Доказательство. Каждая $(n-1)$-мерная неприводимая компонента D_i множества Σ, не содержащая точку a, не пересекает страта B (см. утверждение 2.5). Поэтому объединение D_a неприводимых $(n-1)$-мерных компонент множества, не содержащих точку a, является замкнутым множеством, не пересекающим страта B. Теорема теперь вытекает из утверждения 2.3. □

2.4. Накрывающие над дополнением к подмножеству хаусдорфовой коразмерности, большей единицы, в многообразии. В топологической теории Галуа роль полей играют римановы поверхности, а роль групп Галуа играют их группы монодромии. При этом приходится требовать, чтобы римановы поверхности обладали разумными топологическими свойствами. Римановы поверхности, являющиеся локально тривиальными накрытиями, такими свойствами обладают. Однако класс локально тривиальных накрытий является слишком узким и недостаточным для наших целей. В этом параграфе описывается класс накрывающих многообразий над $M \setminus \Sigma$, где M — многообразие, в котором отмечено в некотором смысле малое подмножество Σ. В одномерном варианте топологической теории Галуа (см. главу 5) идет речь о функциях, римановы поверхности которых являются накрывающими над комплексной прямой, на которой отмечено счетное (возможно, всюду плотное) множество Σ. В этом параграфе ключевую роль играют накрывающие многообразия над комплексным многообразием M, в котором отмечено аналитическое подмножество Σ (см. п. 2.5).

Пусть (M, Σ) — пара, состоящая из связного вещественного многообразия M и его подмножества $\Sigma \subset M$, таких что дополнение $M \setminus \Sigma$ локально линейно связно и всюду плотно в многообразии M. В качестве примера такого подмножества Σ можно взять любое подмножество многообразия M, коразмерность которого по Хаусдорфу строго больше единицы. Отметим точку b, лежащую в дополнении к множеству Σ.

Определение 1. Связное многообразие R вместе с отмеченной точкой c и с проекцией $\pi: R \to M$ назовем *накрывающим многообразием над* $M \setminus \Sigma$ с отмеченной точкой b, если, во-первых, отображение π является локальным гомеоморфизмом, во-вторых, оно переводит отмеченную точку c в отмеченную точку b, $\pi(c) = b$, и, в-третьих, для всякой кривой γ в множестве $M \setminus \Sigma$, начинающейся в точке b, $\gamma: [0, 1] \to M \setminus \Sigma$, $\gamma(0) = b$, существует поднятие $\tilde{\gamma}$ кривой γ, $\tilde{\gamma}: [0, 1] \to R$, $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, начинающееся в точке c, $\tilde{\gamma}(0) = c$.

Для удобства изложения мы будем считать, что многообразие M наделено некоторой римановой метрикой.

Определение 2. Скажем, что подгруппа Γ в фундаментальной группе $\pi_1(M \setminus \Sigma, b)$ является *открытой*, если для каждой кривой $\gamma: [0, 1] \to M \setminus \Sigma$, $\gamma(0) = \gamma(1) = b$, принадлежащей подгруппе Γ, существует число $\varepsilon > 0$, такое что всякая кривая $\tilde{\gamma}\colon [0, 1] \to M \setminus \Sigma$, $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = b$, для которой при любом t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, расстояние между точками $\gamma(t)$ и $\tilde{\gamma}(t)$ не превосходит ε, тоже лежит в подгруппе Γ, $\tilde{\gamma} \in \Gamma$.

С каждым накрывающим многообразием $\pi\colon (R, c) \to (M, b)$ над множеством $M \setminus \Sigma$ свяжем подгруппу в фундаментальной группе множества $(M \setminus \Sigma, b)$. Скажем, что кривая $\gamma\colon [0, 1] \to M \setminus \Sigma$, $\gamma(0) = \gamma(1) = b$, является *допустимой* для накрывающего многообразия (R, c), если поднятие $\tilde{\gamma}\colon [0, 1] \to R$ этой кривой $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ с началом в точке c, $\tilde{\gamma}(0) = c$, является замкнутой кривой, т. е. если $\tilde{\gamma}(1) = c$. Ясно, что все допустимые для накрывающего многообразия кривые образуют подгруппу в фундаментальной группе $\pi_1(M \setminus \Sigma, b)$. Будем говорить, что эта подгруппа *соответствует* накрывающему многообразию (R, c).

Определение 3. Накрывающее многообразие $\pi\colon (R, c) \to (M, b)$ над множеством $M \setminus \Sigma$ называется *максимальным*, если его нельзя вложить ни в какое большее накрывающее многообразие, другими словами, если из существования другого накрывающего многообразия $\pi^1\colon (R_1, c_1) \to (M, b)$ над множеством $M \setminus \Sigma$ и из существования вложения $i\colon (R, c) \to (R_1, c_1)$, коммутирующего с проекциями $\pi = \pi^1 \circ i$, вытекает, что вложение i является гомеоморфизмом.

Теорема 2.7. 1. *Если подгруппа Γ в фундаментальной группе множества $M \setminus \Sigma$ с отмеченной точкой b соответствует накрывающему многообразию $\pi\colon (R, c) \to (M, b)$ над $M \setminus \Sigma$ с отмеченной точкой c, $\pi(c) = b$, то подгруппа Γ открыта в $\pi_1(M \setminus \Sigma, b)$.*

2. *Для всякой открытой подгруппы Γ в группе $\pi_1(M \setminus \Sigma, b)$ существует единственное максимальное накрывающее многообразие $\tilde{\pi}(\Gamma)\colon (\tilde{R}(\Gamma), c) \to (M, b)$ над множеством $M \setminus \Sigma$, которому соответствует подгруппа Γ.*

3. *Произвольное открытое множество U в многообразии $\tilde{R}(\Gamma)$, содержащее полный прообраз множества $M \setminus \Sigma$ при отображении $\tilde{\pi}(\Gamma)$ и наделенное ограничением проекции $\tilde{\pi}(\Gamma)\colon U \to M$, является накрывающим многообразием над $M \setminus \Sigma$, соответствующим группе $\Gamma \subset \pi_1(M \setminus \Sigma, b)$. Обратно, каждое накрывающее многообразие над $M \setminus \Sigma$, соответствующее подгруппе Γ, получается таким способом.*

Наметим доказательство теоремы. Докажем сначала п. 1. Пусть кривая γ в множестве $M \setminus \Sigma$ поднимается на R, начиная из точки c, как замкнутая кривая. Отображение $\pi: R \to M$ является локальным гомеоморфизмом. Поэтому все достаточно близкие к кривой γ замкнутые кривые $\tilde{\gamma}$, лежащие в многообразии M, тоже поднимаются на R, начиная из точки c, как замкнутые кривые. (Это верно, даже если близкая кривая $\tilde{\gamma}$ пересекает множество Σ.) Поэтому подгруппа Γ, соответствующая накрывающему многообразию над множеством $M \setminus \Sigma$, является открытой подгруппой в $\pi_1(M \setminus \Sigma, b)$.

Для доказательства утверждения пункта 2 прежде всего нужно предъявить конструкцию максимального накрывающего многообразия $\tilde{\pi}(\Gamma): (\tilde{R}(\Gamma), c) \to (M, b)$ над $M \setminus \Sigma$, соответствующего открытой подгруппе Γ в группе $\pi_1(M \setminus \Sigma, b)$.

Определение 4. Пусть Γ — открытая подгруппа в $\pi_1(M \setminus \Sigma, b)$. Замкнутую кривую γ на многообразии M, начинающуюся и заканчивающуюся в точке b, $\gamma: [0, 1] \to M$, $\gamma(0) = \gamma(1) = b$, назовем Γ-*допустимой*, если она обладает следующим свойством. Существует число $\varepsilon > 0$, такое что всякая замкнутая кривая в множестве $M \setminus \Sigma$, начинающаяся и заканчивающаяся в точке b, $\tilde{\gamma}: [0, 1] \to M \setminus \Sigma$, $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = b$, для которой при любом t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, расстояние между точками $\gamma(t)$ и $\tilde{\gamma}(t)$ не превосходит ε, принадлежит группе Γ.

С каждой (вообще говоря, незамкнутой) кривой $\gamma: [0, 1] \to M$, $\gamma(0) = b$, связана замкнутая дважды пройденная кривая, являющаяся композицией кривой γ и кривой γ^{-1}.

Определение 5. Скажем, что незамкнутая кривая $\gamma: [0, 1] \to M$ является Γ-*хорошей*, если

1) кривая γ начинается в отмеченной точке, $\gamma(0) = b$;

2) дважды пройденная кривая $\gamma\gamma^{-1}$ является Γ-допустимой.

Множество всех Γ-хороших кривых обозначим через $\Pi(\Gamma, b)$. Введем на множестве $\Pi(\Gamma, b)$ соотношение эквивалентности. Две Γ-хорошие кривые γ_1 и γ_2 назовем Γ-*эквивалентными*, если

1) кривые γ_1 и γ_2 имеют одинаковые правые концы, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$;

2) композиция γ кривых γ_1 и γ_2^{-1} является Γ-допустимой.

Опишем теперь множество $\tilde{R}(\Gamma)$ и отображение $\tilde{\pi}(\Gamma): \tilde{R}(\Gamma) \to M$ на теоретико-множественном уровне. Множество $\tilde{R}(\Gamma)$ — это фактормножество множества $\Pi(\Gamma, b)$ всех Γ-хороших кривых по описанному выше соотношению эквивалентности. Отображение $\tilde{\pi}(\Gamma)$ сопоставляет каждой кривой $\gamma \in \pi(\Gamma, b)$ ее правый конец $\gamma(1)$. Отмеченная точка $\tilde{c}$ в множестве $\tilde{R}(\Gamma)$ — класс эквивалентности постоянной кривой $\gamma(t) \equiv b$.

Определим теперь топологию в множестве $\tilde{R}(\Gamma)$: топология в $\tilde{R}(\Gamma)$ — это минимальная топология, для которой отображение $\tilde{\pi}(\Gamma)\colon \tilde{R}(\Gamma) \to M$ является непрерывным.

Легко видеть, что построенное многообразие $\tilde{R}(\Gamma)$ вместе с отмеченной точкой $\tilde{c}$ и проекцией $\tilde{\pi}(\Gamma)$ действительно представляет собой накрывающее многообразие над множеством $M \setminus \Sigma$, соответствующее подгруппе Г.

Докажем, что $\tilde{R}(\Gamma)$ является расширением всякого другого накрывающего многообразия $\pi\colon (R, c) \to (M, b)$ над множеством $M \setminus \Sigma$, соответствующего подгруппе Г. Пусть $\gamma\colon [0, 1] \to R$ — любая кривая на многообразии R, начинающаяся в точке c. Очевидно, что проекция $\pi \circ \gamma$ этой кривой будет Г-хорошей в многообразии M.

Сопоставим каждой точке d на многообразии R совокупность $\Pi(c, d, R)$ всех кривых $\gamma\colon [0, 1] \to R$ на многообразии R с началом в точке c и с концом в точке d, $\gamma(0) = c$, $\gamma(1) = d$. Ясно, что проекции $\pi \circ \gamma$ всех кривых γ из множества $\Pi(c, d, R)$ являются $\widetilde{\Gamma}$-эквивалентными кривыми. Поэтому отображение, сопоставляющее каждой точке d многообразия R совокупность проекций $\pi \circ \gamma$ всех кривых γ из множества $\Pi(c, d, R)$, является вложением многообразия R в описанное выше многообразие $\tilde{R}(\Gamma)$.

Проверка остальных утверждений теоремы не представляет труда, и мы не будем на ней останавливаться.

2.5. Накрывающие над дополнением к аналитическому подмножеству в многообразии.

Утверждение 2.8. *Пусть M — аналитическое многообразие, Σ — аналитическое подмножество в M и $b \in M \setminus \Sigma$ — отмеченная точка. Фиксируем некоторую подгруппу Г фундаментальной группы $\pi_1(M \setminus \Sigma, b)$. Допустим, что некоторая Г-хорошая кривая* (см. определение 5) *$\gamma_1\colon\ [0, 1] \to M$, $\gamma_1(0) = b$, при $0 \leqslant t < 1$ лежит в множестве $M \setminus \Sigma$, а ее правый конец $a = \gamma(1)$ принадлежит множеству Σ. Рассмотрим любую допустимую стратификацию множества Σ* (см. п. 2.2). *Пусть B — страт этой стратификации, который содержит точку a, и пусть $\gamma_2\colon [0, 1] \to B$ — любая кривая в этом страте, начинающаяся в точке a, $\gamma_2(0) = a$. Тогда композиция кривых γ_1 и γ_2 является Г-хорошей кривой.*

Доказательство. Пусть U — достаточно малая окрестность страта B, о которой идет речь в условии 2 (см. п. 2.2), и $\pi\colon U \to B$ — соответствующая проекция. Обозначим через $\pi(\Gamma)\colon (R(\Gamma), c) \to (M \setminus \Sigma, b)$ локально тривиальное накрытие, соответствующее подгруппе $\Gamma \subset \subset \pi_1(M \setminus \Sigma, b)$. По определению накрытия кривая $\gamma_1\colon [0, t_1] \to M \setminus \Sigma$, где t_1 — любое число, строго меньшее 1, поднимается на многообразие $R(\Gamma)$ так, что поднятая кривая начинается в отмеченной точке $c \in R(\Gamma)$. Фиксируем значение параметра t_1, настолько близкое к 1, что точка $b_1 = \gamma(t_1)$ принадлежит множеству U. Обозначим через c_1 точку на поднятой кривой, соответствующую параметру t_1, $\pi(c_1) = b_1$. Пусть R_1 — компонента связности прообраза множества U при отображении $\pi(\Gamma)\colon R(\Gamma) \to M \setminus \Sigma$. Ограничение ρ отображения $\pi(\Gamma)$ на многообразие R_1 задает локально тривиальное накрытие $\rho\colon (R_1, c_1) \to (U \setminus \Sigma, b_1)$. Обозначим через Γ_1 подгруппу фундаментальной группы $\pi_1(U \setminus \Sigma, b_1)$, соответствующую этому накрытию.

Лемма 2.9. *Группа Γ_1 содержит ядро гомоморфизма фундаментальной группы пространства $U \setminus \Sigma$ в фундаментальную группу страта B, индуцированного проектированием $\pi\colon U \to B$.*

Доказательство. Ограничение отображения $\pi\colon U \to B$ на область $U \setminus \Sigma$ является локально тривиальным расслоением (см. условие 2 из п. 2.2). Обозначим через a_1 образ точки b_1 при проекции π и обозначим через $V \setminus F$ слой расслоения над точкой a_1. Из отрезка

$$\ldots \to \pi_1(V \setminus F, b_1) \to \pi_1(U \setminus \Sigma, b_1) \to \pi_1(B, a_1) \to \ldots$$

точной гомотопической последовательности этого расслоения вытекает, что ядро интересующего нас гомоморфизма совпадает с образом фундаментальной группы слоя $\pi_1(V \setminus F, b_1)$. Поэтому нам надо показать, что группа Γ_1 содержит образ фундаментальной группы слоя. Пусть $\bar{\gamma}\colon [0, 1] \to V \setminus F$, $\bar{\gamma}(0) = \bar{\gamma}(1) = b_1$, — любая замкнутая петля, лежащая в слое. Покажем, что $\bar{\gamma} \in \Gamma_1$. Для этого нам надо проверить, что композиция кривых $\tilde{\gamma}_1$, $\bar{\gamma}$ и $\tilde{\gamma}_1^{-1}$, где $\tilde{\gamma}_1$ — ограничение кривой γ_1 на отрезок $[0, t_1]$, принадлежит группе $\Gamma \subset \pi_1(M \setminus \Sigma, b)$. Но композицию этих кривых можно рассматривать как малое возмущение дважды пройденной кривой γ_1. По условию кривая γ_1 является Γ-хорошей, что и означает, что малое возмущение дважды пройденной кривой, не пересекающее множества Σ, лежит в группе Γ. Лемма доказана. □

Вернемся к доказательству утверждения 2.13. Пусть γ — композиция кривых γ_1 и γ_2, о которых идет речь в утверждении. Мы должны показать, что кривая γ является Γ-хорошей, т. е. что любая малая деформация дважды пройденной кривой γ, которая не пересекает множества Σ, лежит в группе Γ. Сначала докажем это для специальных малых деформаций, не пересекающих множество Σ и имеющих следующий вид. Кривая $\bar{\gamma}$ должна быть композицией кривых $\bar{\gamma}_1$, $\bar{\gamma}_2$ и $\bar{\gamma}_3$, которые являются малыми деформациями кривых γ_1, $\gamma_2\gamma_2^{-1}$ и γ_1^{-1} соответственно; при этом кривая $\bar{\gamma}_2$ должна быть замкнута. Разумеется, мы считаем, что выполнены равенства $\bar{\gamma}_1(1)=\bar{\gamma}_2(0)=\bar{\gamma}_2(1)=\bar{\gamma}_3(0)$, иначе композиция не определена. Так как кривая $\bar{\gamma}_2$ замкнута и близка к дважды пройденной кривой γ_2, ее проекция на страт B задает тривиальный элемент фундаментальной группы базы. Рассмотрим поднятие кривой $\bar{\gamma}_1$ на пространство расслоения $R(\Gamma)$, начинающееся в точке c. Обозначим через c_1 правый конец поднятой кривой. Согласно лемме поднятие кривой $\bar{\gamma}_2$ на пространство $R(\Gamma)$, начинающееся в точке c_1, будет заканчиваться в той же точке c_1. Далее, поднятие кривой $\bar{\gamma}_3$ на $R(\Gamma)$, начинающееся в точке c_1, должно заканчиваться в точке c. Действительно, композиция кривых $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_3$ является малой деформацией дважды пройденной кривой γ_1. Кривая Γ_1 является Γ-хорошей. Поэтому поднятие композиции кривых $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_3$ на $R(\Gamma)$, начинающееся в точке c, должно заканчиваться в той же точке.

Итак, поднятие композиции кривых $\bar{\gamma}_1$, $\bar{\gamma}_2$ и $\bar{\gamma}_3$ на $R(\Gamma)$, начинающееся в точке c, заканчивается в той же точке c. Другими словами, композиция этих кривых лежит в группе Γ. Мы доказали нужное утверждение для специально возмущенной кривой, являющейся дважды пройденной композицией кривых γ_1 и γ_2. Очевидно, что любое малое возмущение этой кривой, лежащей в области $M \setminus \Sigma$, гомотопно в этой области некоторому специальному возмущению этой кривой.

(Дважды пройденная композиция кривых γ_1 и γ_2 является композицией кривых γ_1, $\gamma_2\gamma_2^{-1}$ и γ_1^{-1}. Возмущение этой композиции является композицией трех кривых l_1, l_2 и l_3, из которых кривая l_2 близка к кривой $\gamma_2\gamma_2^{-1}$, но не обязательно замкнута. Такая композиция, очевидно, гомотопна композиции близких кривых $\tilde{l}_1$, $\tilde{l}_2$, $\tilde{l}_3$, из которых кривая $\tilde{l}_2$ замкнута.)

Утверждение 2.13 доказано. □

2.6. Основная теорема. Теперь все готово для формулировки и доказательства основной теоремы этого параграфа.

Теорема 2.10 (об аналитическом продолжении функции вдоль аналитического множества). *Пусть M — комплексное аналитическое многообразие, Σ — аналитическое подмножество в M и f_b — росток аналитической функции в некоторой точке $b \in M$. Допустим, что росток f_b аналитически продолжается вдоль любой кривой $\gamma\colon [0,1] \to M$, $\gamma(0) = b$, не пересекающей множество Σ при $t > 0$. Пусть росток f_b аналитически продолжается вдоль некоторой кривой $\gamma_1\colon [0,1] \to M$, $\gamma_1(0) = b$, с правым концом в точке a, $a = \gamma_1(1)$, принадлежащим множеству Σ, $a \in \Sigma$. Рассмотрим любую допустимую стратификацию множества Σ* (см. п. 2.2). *Пусть B — страт этой стратификации, замыкание которого содержит точку a, и пусть $\gamma_2\colon [0,1] \to M$ — любая кривая, начинающаяся в точке a, $\gamma_2(0) = a$, такая что $\gamma_2(t) \in B$ при $t > 0$. Тогда росток f_b аналитически продолжается вдоль композиции кривых γ_1 и γ_2.*

Доказательство. Пусть росток аналитической функции f_b продолжается вдоль кривой γ. Рассмотрим любую точку $\tilde{b}$, лежащую в области сходимости ряда Тейлора ростка f_b. Росток в точке $\tilde{b}$ суммы этого ряда Тейлора продолжается вдоль любой кривой, которая вне области сходимости ряда Тейлора достаточно близка к кривой γ. Поэтому *в формулировке основной теоремы, не ограничивая общности, можно считать, что точка b лежит в множестве $M \setminus \Sigma$, точка a лежит в страте B и кривая $\gamma_1\colon [0,1] \to M$, $\gamma_1(0) = b$, $\gamma_1(1) = a$, не пересекает множество Σ при $0 \leqslant t < 1$.* В этих предположениях мы и будем доказывать основную теорему.

Обозначим через Γ подгруппу фундаментальной группы области $M \setminus \Sigma$ с отмеченной точкой b, состоящую из петель в $M \setminus \Sigma$ с началом и концом в отмеченной точке, продолжение вдоль которых ростка f_b приводит к тому же ростку. Рассмотрим максимальное накрывающее многообразие $\tilde{\pi}(\Gamma)\colon (\tilde{R}(\Gamma), c) \to (M, b)$ над множеством $M \setminus \Sigma$, соответствующее этой подгруппе Γ (см. определение 2.9). Многообразие $\tilde{R}(\Gamma)$ имеет естественную структуру комплексно-аналитического многообразия; эта структура наследуется из аналитической структуры на M при отображении $\tilde{\pi}(\Gamma)$, являющемся локальным гомеоморфизмом. Множество $\tilde{\Sigma} = \tilde{\pi}^{-1}(\Gamma)(\Sigma)$ является аналитическим подмножеством в этом многообразии $\tilde{R}(\Gamma)$. Росток $\tilde{f}_c = \pi^* f_b$, рассматриваемый как росток аналитической функции в точке c на аналитическом многообразии $\tilde{R}(\Gamma)$, по условию аналитически продолжается на все многообразие $\tilde{R}(\Gamma) \setminus \tilde{\Sigma}$ и задает там однозначную аналитическую функцию $\tilde{f}$. Всякая кривая $\gamma\colon [0,1]\to M$, $\gamma(0)=b$, вдоль которой аналитически продолжается росток f_b, является Г-хорошей кривой. Действительно, аналитическое продолжение ростка f_b как вдоль дважды пройденной кривой γ, так и вдоль любой близкой к кривой $\gamma\gamma^{-1}$ замкнутой кривой $\tilde{\gamma}\colon [0,1]\to M$, $\tilde{\gamma}(0)=\tilde{\gamma}(1)=b$, приводит, очевидно, к тому же ростку f_b, с которого мы начинали.

В частности, кривая $\gamma_1\colon [0,1]\to M$, $\gamma_1(0)=b$, $\gamma_1(1)=a\in\Sigma$, вдоль которой продолжается росток f_b и о которой идет речь в основной теореме, является Г-хорошей. Поэтому существует поднятие кривой γ_1 на $\tilde{R}(\Gamma)$, которое начинается в точке c. Обозначим через $\tilde{a}$ правый конец поднятой кривой. Согласно утверждению 13 для всякой кривой γ_2, начинающейся в точке a и лежащей в страте B, композиция кривых γ_1 и γ_2 является Г-хорошей кривой. Следовательно, существует поднятие этой композиции на $\tilde{R}(\Gamma)$ с началом в точке c. Другими словами, это означает, что всякая кривая, лежащая в страте B и начинающаяся в точке a, поднимается на $\tilde{R}(\Gamma)$ с началом в точке $\tilde{a}$. Пусть $\widetilde{B}$ — компонента связности прообраза страта B относительно проекции $\tilde{\pi}(\Gamma)$, которая содержит точку $\tilde{a}$. Мы доказали, что ограничение отображения $\tilde{\pi}(\Gamma)$ на $\widetilde{B}$ задает локально тривиальное накрытие над стратом B. Ясно, что топология пары, состоящая из многообразия $\tilde{R}(\Gamma)$ и множества $\widetilde{\Sigma}$, являющегося полным прообразом множества Σ при проекции $\tilde{\pi}(\Gamma)$, имеет постоянную топологию вдоль страта $\widetilde{B}$. Действительно, локально тройка $(\tilde{R}(\Gamma), \widetilde{\Sigma}, \widetilde{B})$ гомеоморфна тройке (M, Σ, B), и топология пары (M, Σ) по условию постоянна вдоль страта B.

Теперь мы можем применить теорему 6 к ростку $\tilde{f}_c=\pi^* f_b$ однозначной аналитической функции на многообразии $\tilde{R}(\Gamma)\setminus\widetilde{\Sigma}$, которая продолжается в окрестность точки $\tilde{a}\in\widetilde{B}$. Доказательство теоремы 2.15 закончено. □

§ 3. О монодромии многозначной функции на ее множестве ветвления

Многозначная аналитическая функция в $\mathbb{C}^n$ называется $\mathcal{S}$-функцией, если множество ее особых точек покрывается счетным числом аналитических подмножеств (и занимает, следовательно, очень малую часть пространства $\mathbb{C}^n$). При отображении $\pi\colon (Y, y_0)\to(\mathbb{C}^n, a)$ топологического пространства Y в $\mathbb{C}^n$ росток f_a $\mathcal{S}$-функции f в точке a может индуцировать многозначную функцию на пространстве Y. Для этого нужно, чтобы росток f_a аналитически продолжался вдоль образа любой кривой из пространства Y, начинающейся в отмеченной точке y_0. Такая ситуация возможна, даже если точка a лежит в множестве особых точек функции f (некоторые из ростков многозначной функции f могут оказаться неособыми в особых точках этой функции) и пространство Y отображается в это множество.

Можно ли оценить группы монодромии индуцированных таким способом многозначных функций через группу монодромии исходной $\mathcal{S}$-функции f (верно ли, например, что если группа монодромии $\mathcal{S}$-функции f разрешима, то разрешима и группа монодромии каждой индуцированной из f функции)? В этом параграфе мы получим положительный ответ на этот вопрос (см. п. 3.4, 3.5).

Это совсем не очевидно, если множество особых точек функции f незамкнуто. Отметим, кстати, что $\mathcal{S}$-функции с незамкнутыми множествами особых точек не являются чем-то необычным. Именно такими, как правило, бывают многозначные элементарные функции (см. § 3 главы 5).

Описание связи группы монодромии исходной $\mathcal{S}$-функции с группами монодромии индуцированных таким способом функций потребовало введения операции индуцированного замыкания групп (см. п. 3.2). В свою очередь, использование этой операции вынуждает пересмотреть определения различных классов пар групп (см. п. 3.5), встречающихся в одномерном варианте топологической теории Галуа (см. п. 5.5 и 7.1 главы 5). В этом параграфе строятся определения, позволяющие работать с функциями многих переменных, имеющими всюду плотные множества особых точек и континуальные группы монодромии.

3.1. $\mathcal{S}$-функции. В одномерном варианте топологической теории Галуа центральную роль играют $\mathcal{S}$-функции, т. е. многозначные аналитические функции одной переменной, множество особых точек которых не более чем счетно. Обобщим понятие класса $\mathcal{S}$-функций на многомерный случай. Все утверждения этого параграфа несложны и доказываются точно так же, как их одномерные аналоги (см. § 4 главы 5); поэтому мы не будем останавливаться на их доказательстве.

Подмножество A в связном k-мерном аналитическом многообразии $\boldsymbol{M}$ назовем *тощим*, если существует счетное множество открытых областей $U_i \subset M$ и счетное множество собственных аналитических подмножеств $A_i \subset U_i$ в этих областях, таких что $A \subseteq \bigcup A_i$. Многозначную аналитическую функцию на многообразии M назовем *$\mathcal{S}$-функцией*, если множество ее особых точек является тощим. Уточним это определение.

Два регулярных ростка f_a и g_b, заданных в точках a и b многообразия M, называются *эквивалентными*, если росток g_b получается из ростка f_a регулярным продолжением вдоль некоторой кривой. Каждый росток g_b, эквивалентный ростку f_a, называется также ростком многозначной аналитической функции f, порожденной ростком f_a. Точка $b \in M$ называется особой для ростка f_a, если существует кривая $\gamma\colon [0, 1] \to M$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, вдоль которой росток f_a не может быть регулярно продолжен, но для любого t, $0 \leqslant t < 1$, росток f_a регулярно продолжается вдоль укороченной кривой $\gamma\colon [0, t] \to M$. Легко видеть, что у эквивалентных ростков множества особых точек совпадают. Росток называется *$\mathcal{S}$-ростком*, если множество его особых точек является тощим. Многозначная аналитическая функция называется *$\mathcal{S}$-функцией*, если каждый ее росток является $\mathcal{S}$-ростком.

Фиксируем произвольную риманову метрику ρ на M.

Лемма 3.1 (о снятии кривой с тощего множества). *Пусть A — тощее множество на многообразии M, $\gamma\colon [0, 1] \to M$ — кривая и φ — непрерывная положительная функция на интервале $0 < t < 1$. Тогда существует кривая $\hat{\gamma}\colon [0, 1] \to M$, такая что $\hat{\gamma}(t) \notin A$ при $0 < t < 1$ и $\rho(\gamma(t), \hat{\gamma}(t)) < \varphi(t)$.*

Кроме множества особых точек удобно рассматривать и другие множества, вне которых функция неограниченно продолжается. Тощее множество A называется *запрещенным множеством* для регулярного ростка f_a, если росток f_a регулярно продолжается вдоль кривой $\gamma(t), \gamma(0) = a$, пересекающей множество A лишь, может быть, в начальный момент.

Теорема 3.2 (о запрещенном множестве). *Тощее множество является запрещенным множеством ростка, если и только если оно содержит множество его особых точек. В частности, росток обладает некоторым запрещенным множеством, если и только если он является ростком $\mathcal{S}$-функции.*

Группа монодромии $\mathscr{S}$-функции f с запрещенным множеством A (или, короче, группа A-монодромии) — это группа всех перестановок листов функции f, которые происходят при обходе точек множества A. Остановимся на этом подробнее.

Пусть X — множество всех ростков $\mathscr{S}$-функции f в точке a, не лежащей в множестве A. Возьмем замкнутую кривую γ в $M \setminus A$ с началом в точке a. Продолжение каждого ростка из множества X вдоль кривой γ приводит к ростку из множества X. Итак, каждой замкнутой кривой γ соответствует отображение множества X в себя, причем гомотопным в $M \setminus A$ кривым отвечают одинаковые отображения. Произведению кривых отвечает произведение отображений. Возникает гомоморфизм τ фундаментальной группы множества $M \setminus A$ в группу $S(X)$ взаимно однозначных преобразований множества X. (Здесь и во всем параграфе мы имеем в виду следующую групповую структуру в группе $S(X)$: если f, g — взаимно однозначные преобразования множества X, то их произведением fg в группе $S(X)$ называется композиция $g \circ f$ отображений f и g.) *Группой A-монодромии* $\mathscr{S}$-функции f называется образ фундаментальной группы $\pi_1(M \setminus A, a)$ в группе $S(X)$ при гомоморфизме τ.

Группа A-монодромии — это не только абстрактная группа, но и группа транзитивных перестановок листов функции (транзитивность этой группы легко выводится из леммы о снятии кривой с тощего множества). Алгебраически такой объект задается парой групп: группой перестановок и ее подгруппой, являющейся стационарной подгруппой некоторого элемента.

Монодромной парой $\mathscr{S}$-функции с запрещенным множеством A называется пара групп, состоящая из группы A-монодромии и стационарной подгруппы некоторого листа этой функции. Эта пара групп определена корректно, т. е. с точностью до изоморфизма не зависит ни от выбора точки a, ни от выбора листа функции. В случае, когда запрещенное множество A совпадает с множеством особых точек функции, упоминание о запрещенном множестве мы будем опускать и говорить о *группе монодромии* и *монодромной паре* этой функции. В случае, когда множество особых точек функции незамкнуто, группа A-монодромии может оказаться собственной подгруппой группы монодромии этой функции.

Группа $S(X)$ наделена топологией (см. п. 5.2 главы 5 и п. 3.3).

Утверждение 3.3. *Замыкание в группе $S(X)$ группы A-монодромии $\mathscr{S}$-функции f не зависит от выбора запрещенного множества A и содержит группу монодромии функции f. При этом замыкание стационарной подгруппы фиксированного листа f_a относительно действия группы A-монодромии содержит стационарную подгруппу этого листа относительно действия группы монодромии.*

3.2. Почти гомоморфизмы и индуцированные замыкания. Нам понадобится конструкция, сопоставляющая каждой группе преобразований множества X некоторую группу преобразований его подмножества L (см. п. 3.3). Для изучения ее свойств удобно воспользоваться понятиями почти гомоморфизма и индуцированного замыкания.

Пусть T — топологическое пространство и S — группа, лежащая в T.

Определение. Отображение $J\colon G\to T$ группы G в пространство T называется *почти гомоморфизмом около группы S*, если

1) отображение J переводит единицу группы G в единицу группы S;

2) для любой точки a группы S и любой окрестности V в пространстве T точки a^{-1} существует такая окрестность U в пространстве T точки a, что для любой точки $\tilde a$ группы G, для которой $J(\tilde a)\in U$, справедливо включение $J(\tilde a^{-1})\in V$;

3) для любых точек a, b группы S и любой окрестности V в пространстве T точки ab существуют такие окрестности U_1 и U_2 в пространстве T точек a и b, что для всяких точек $\tilde a$, $\tilde b$ группы G, для которых $J(\tilde a)\in U_1$ и $J(\tilde b)\in U_2$, справедливо включение $J(\tilde a\tilde b)\in V$.

Основной пример почти гомоморфизма около группы описан в п. 3.3.

Определение. *Индуцированным замыканием* $\bar G(S)$ группы G в группе S относительно почти гомоморфизма $J\colon G\to T$ около группы S называется пересечение группы S с замыканием $\bar J(G)$ в пространстве T образа группы G при отображении J.

Опишем свойства индуцированного замыкания. Прежде всего, *индуцированное замыкание $\bar G(S)$ является подгруппой в группе S*. Далее, *ограничение $J\colon G_1\to T$ почти гомоморфизма $J\colon G\to T$ группы G около группы S на подгруппу G_1 группы G, очевидно, является почти гомоморфизмом группы G_1 около группы S*. Поэтому индуцированное замыкание определено для всех подгрупп группы G одновременно.

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — алфавит, содержащий n символов. *Словом* W в этом алфавите называется любое выражение вида $W = A_{i_1}^{k_1} \ldots A_{i_N}^{k_N}$, где индексы $i_1, \ldots, i_N$ принимают любые целые значения от 1 до n, а степени $k_1, \ldots, k_N$ равны плюс или минус единице. Число $k = |k_1| + \ldots \ldots + |k_N|$ называется длиной слова W. Для всякой группы Π и всякой последовательности $a_1, \ldots, a_n$ точек группы Π определено значение $W(a_1, \ldots, a_n)$ слова W, являющееся точкой $a_{i_1}^{k_1} \ldots a_{i_n}^{k_n}$ группы Π.

Утверждение 3.4. *Пусть $J: G \to T$ — почти гомоморфизм группы G около группы S. Тогда для всякого слова W, всякого набора точек $a_1, \ldots, a_n$ группы S и всякой окрестности V в пространстве T точки $W(a_1, \ldots, a_n) \in S$ существуют такие окрестности $U_1, \ldots \ldots, U_n$ в пространстве T точек $a_1, \ldots, a_n$, что для всяких точек $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$, для которых $J(\tilde{a}_1) \in U_1, \ldots, J(\tilde{a}_n) \in U_n$, справедливо включение $J(W(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)) \in V$.*

Доказательство. Проведем индукцию по длине k слова W. Для единственного нетривиального слова $W = A_{i_1}^{-1}$ длины один утверждение справедливо по определению почти гомоморфизма. Каждое слово W длины $k > 1$ записывается либо в виде $A_{i_1} W_1$, либо в виде $A_{i_1}^{-1} W_1$, где W_1 — слово длины $k - 1$. В любом из этих двух случаев по определению почти гомоморфизма для каждой окрестности V точки $W(a_1, \ldots, a_n)$ существуют окрестности V_1 и V_2 точек a_{i_1} и $W_1(a_1, \ldots, a_n)$, такие что если точки $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$ группы G удовлетворяют включениям $J(\tilde{a}_{i_1}) \in V_1$ и $J(W_1(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)) \in V_2$, то $J(W(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)) \in V$. По предположению индукции найдутся такие окрестности $U_1, \ldots, U_n$ точек $a_1, \ldots, a_n$, что если $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$ удовлетворяют включениям $J(\tilde{a}_1) \in U_1, \ldots, J(\tilde{a}_n) \in U_n$, то $J(W(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)) \in V_2$. Поэтому если точка $\tilde{a}_{i_1}$ удовлетворяет включению $J(\tilde{a}_{i_1}) \in U_{i_1} \cap V_1$, а точки $\tilde{a}_j$ при $j \neq i_1$ удовлетворяют включениям $J(\tilde{a}_j) \in U_j$, то $J(W(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)) \in V$. Утверждение доказано. □

Теорема 3.5. *Для всякого почти гомоморфизма $J: G \to T$ группы G около группы S и всякого нормального делителя G_1 группы G, для которого факторгруппа G/G_1 коммутативна, индуцированные замыкания $\bar{G}_1(S)$, $\bar{G}(S)$ групп G_1, G в группе S относительно почти гомоморфизма J удовлетворяют следующим условиям: группа $\bar{G}_1(S)$ является нормальным делителем в группе $\bar{G}(S)$, и факторгруппа $\bar{G}(S)/\bar{G}_1(S)$ коммутативна.*

Доказательство. Нам надо доказать, что для каждой пары точек a, b группы $\bar{G}(S)$ точка $aba^{-1}b^{-1}$ принадлежит группе $\bar{G}_1(S)$, т. е. что в любой окрестности V точки $aba^{-1}b^{-1}$ существуют точки, принадлежащие образу $J(G_1)$ группы G_1. Согласно утверждению, примененному к слову $W = A_1A_2A_1^{-1}A_2^{-1}$, существуют окрестности U_1 и U_2 точек a и b, такие что для всякой пары точек $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ группы G, для которых выполнены соотношения $J(\tilde{a}) \in U_1$, $J(\tilde{b}) \in U_2$, справедливо включение $J(\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}) \in V$. Точки a и b лежат в группе $\bar{G}(S)$; поэтому точки $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ группы G, для которых эти соотношения выполнены, действительно существуют. Для такой пары точек $\tilde{a}, \tilde{b}$ точка $\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}$ лежит в группе G_1, так как факторгруппа G/G_1 коммутативна. Итак, мы нашли точку, принадлежащую образу $J(G_1)$ группы G_1 в заданной окрестности V точки $aba^{-1}b^{-1}$. Теорема 3.5 доказана. □

Теорема 3.6. *Для всякого почти гомоморфизма $J : G \to T$ группы G около группы S и всякой подгруппы G_1 группы G, имеющей конечный индекс k в группе G, индуцированные замыкания $\bar{G}_1(S)$, $\bar{G}(S)$ групп G_1, G в группе S относительно почти гомоморфизма J удовлетворяют следующему условию: группа $\bar{G}_1(S)$ является подгруппой конечного индекса в группе $\bar{G}(S)$, причем этот индекс меньше или равен k.*

Доказательство. Пусть $R_1, \ldots, R_k$ — правые классы смежности группы G по подгруппе G_1. Обозначим через P_i, $i = 1, \ldots, k$, пересечение группы S с замыканием образа $J(R_i)$ класса R_i при отображении J. Мы покажем, что каждый правый класс смежности группы $\bar{G}(S)$ по группе $\bar{G}_1(S)$ совпадает с одним из множеств $P_1, \ldots, P_k$. Отсюда немедленно вытекает теорема 3.6, так как это означает, что правых классов смежности не больше чем k.

1. Покажем, что объединение множеств $P_1, \ldots, P_k$ совпадает с группой $\bar{G}(S)$. Действительно, группа G является объединением правых классов смежности $R_1, \ldots, R_k$; поэтому $J(G) = \bigcup_{i=1}^{k} J(R_i)$. Отсюда имеем $\bar{J}(G) = \bigcup_{i=1}^{k} \bar{J}(R_i)$. Пересекая фигурирующие в этом равенстве множества с группой S, получим $\bar{G}(S) = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$.

2. Пусть a — точка группы $\bar{G}(S)$ и $a\bar{G}_1(S)$ — правый класс смежности, содержащий эту точку. Согласно п. 1 точка a лежит в одном из

множеств P_i. Покажем, что P_i содержит весь класс $a\overline{G}_1(S)$. Действительно, каждая точка этого класса имеет вид $b=ac$, где $c\in\overline{G}_1(S)$. Все три точки a, b, c лежат в группе S. По определению почти гомоморфизма для каждой окрестности V точки b существуют окрестности U_1 и U_2 точек a и c, такие что если $J(\tilde{a})\in U_1$ и $J(\tilde{c})\in U_2$, то $J(\tilde{a}\tilde{c})\in V$. Точки $\tilde{a}$ и $\tilde{c}$, удовлетворяющие этим соотношениям, можно выбрать в классе R_i и группе G_1 соответственно, так как $a\in\bar{J}(R_i)$, $c\in\overline{G}_1(S)$. Для такого выбора точек $\tilde{a}$ и $\tilde{c}$ точка $\tilde{a}\tilde{c}$ лежит в классе R_i. Поэтому точка b лежит в множестве P_i, что и требовалось доказать.

3. Пусть множество P_i непусто и $a\in P_i$ — одна из его точек. Покажем, что множество P_i содержится в классе $a\overline{G}_1(S)$. Пусть b — любая точка в P_i. Рассмотрим элемент $c=a^{-1}b$. Покажем, что $c\in\overline{G}_1(S)$. Для этого нужно показать, что всякая окрестность V элемента c пересекается с образом $J(G_1)$ группы G_1. Все три точки a, b, c лежат в группе S. По определению почти гомоморфизма для каждой окрестности V точки c существуют окрестности U_1 и U_2 точек a и b, такие что если $J(\tilde{a})\in U_1$ и $J(\tilde{b})\in U_2$, то $J(\tilde{a}^{-1}\tilde{b})\in V$. Точки $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, удовлетворяющие этим соотношениям, можно выбрать в классе R_i, так как $a, b\in P_i$. Для такого выбора точек $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ точка $\tilde{a}^{-1}\tilde{b}$ лежит в группе G_1. Поэтому точка c лежит в группе $\overline{G}_1(S)$, что и требовалось доказать.

Теорема 3.6 доказана. □

3.3. Индуцированное замыкание группы преобразований множества в группе преобразований его подмножества. Опишем основной пример почти гомоморфизма J около группы.

а) *Топологическое пространство* $T=T(L, X)$. Пусть X — произвольное множество и $L\subseteq X$ — любое его подмножество. Рассмотрим пространство $T=T(L, X)$ отображений из L в X, наделенное следующей топологией. Для каждого отображения $f: L\to X$ и каждого конечного множества $K\subset L$ обозначим через $U_K(f)$ множество отображений из L в X, совпадающих с отображением f на множестве K. По определению базис окрестностей элемента f в пространстве $T(L, X)$ образует совокупность множеств $\{U_K(f)\}$, где индекс K пробегает множество всех конечных подмножеств в L. Другими словами, только что определенную топологию в множестве $T(L, X)$ можно описать как топологию поточечной сходимости отображений из L в X в дискретной топологии множества X. Для бесконечных множеств X топология в $T(L, X)$ нетривиальна и полезна для дальнейшего.

б) *Группа* $S = S(L) \subset T(L, X)$. Группа $S(L)$, состоящая из всех взаимно однозначных преобразований множества L, естественным образом вложена в пространство $T(L, X)$: взаимно однозначное отображение $F: L \to L$ можно рассматривать и как отображение $f: L \to X$, так как $L \subset X$.

в) *Группа* G *и отображение* $J(G) \to T(L, X)$. В качестве группы G возьмем любую подгруппу группы $S(X)$ взаимно однозначных преобразований множества X. В качестве отображения $J: G \to T(L, X)$ рассмотрим отображение, сопоставляющее каждому отображению $f: X \to X$, принадлежащему группе G, его ограничение на множество L, т. е. $J(f) = f|_L$.

Теорема 3.7. *В описанной выше в п.* а), б), в) *ситуации отображение* $J: G \to T(L, X)$ *является почти гомоморфизмом около группы* $S = S(L)$.

Доказательство. 1. Ограничение тождественного отображения множества X на подмножество L является тождественным отображением множества L. Поэтому отображение J переводит единицу группы G в единицу группы $S(L)$.

2. Пусть $a \in S(L)$. Фиксируем произвольное конечное подмножество $K \subset L$ и рассмотрим окрестность $V = U_K(a^{-1})$ элемента a^{-1} в пространстве $T(L, X)$. Обозначим через K_1 образ множества K при отображении $a: L \to L$. Пусть $\tilde{a}$ — преобразование из $S(X)$ и $J(\tilde{a})$ — его ограничение на L, $J(\tilde{a}) = \tilde{a}|_L$. Рассмотрим окрестность $U_1 = U_{K_1}(a)$ элемента a. Если $J(\tilde{a}) \in U_1$, то $J(\tilde{a}^{-1})|_K = a|_K$.

3. Пусть $a, b \in S(L)$, и $ab \in S(L)$ — их композиция $b \circ a$. Фиксируем произвольное конечное множество $K \subset L$ и рассмотрим окрестность $V = U_K(ab)$ элемента ab в пространстве $T(L, X)$. Обозначим через K_1 образ множества K при отображении $a: L \to L$. Пусть $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ — преобразования из $S(X)$ и $J(\tilde{a})$, $J(\tilde{b})$ — их ограничения на множество L, $J(\tilde{a}) = \tilde{a}|_L$, $J(\tilde{b}) = \tilde{b}|_L$.

Рассмотрим окрестности $U_1 = U_K(a)$ и $U_2 = U_{K_1}(b)$ элементов a и b. Если $J(\tilde{a}) \in U_1$ и $J(\tilde{b}) \in U_2$, то $J(\tilde{a}\tilde{b}) \in V$. Действительно, если $\tilde{b}|_{K_1} = b|_{K_1}$ и $\tilde{a}|_K = a|_K$, то $\tilde{a}\tilde{b}|_K = ab|_K$. □

3.4. Группы монодромии индуцированных функций. С каждой однозначной аналитической функцией f можно связать ее струйное расширение $\mathcal{F}$, сопоставляющее каждой точке x росток функции f в этой точке. Аналогично можно говорить о струйном расширении $\mathscr{F}$ многозначной аналитической функции f: это многозначная функция, принимающая значения в множестве ростков функции f и сопоставляющая точке x все регулярные ростки функции f в этой точке.

Пусть f — многозначная $\mathscr{S}$-функция на пространстве $\mathbb{C}^n$ и f_a — некоторый выделенный росток функции f в точке a. Непрерывное отображение $\pi\colon (Y, y_0) \to (\mathbb{C}^n, a)$ линейно связного топологического пространства Y с отмеченной точкой y_0 в пространство $\mathbb{C}^n$, для которого $\pi(y_0) = a$, называется *допустимым* для ростка f_a, если росток f_a аналитически продолжается вдоль образа любой кривой из пространства Y, начинающейся в отмеченной точке y_0.

Замечание. Типичный пример пространств Y, с которыми нам придется иметь дело, доставляют такие локально неодносвязные пространства, как дополнения к счетному всюду плотному множеству $A \subset \mathbb{C}$ комплексной прямой $\mathbb{C}$, т. е. $Y = \mathbb{C} \setminus A$.

С допустимым для ростка f_a отображением $\pi\colon (Y, y_0) \to (\mathbb{C}^n, a)$ свяжем *многозначную функцию* $\pi^*\mathscr{F}$ на пространстве Y, принимающую значения в множестве ростков многозначной функции f в точках пространства $\mathbb{C}^n$. Именно, каждое значение многозначной функции $\pi^*\mathscr{F}$ в точке $y \in Y$ — это росток функции f в точке $\pi(y) \in \mathbb{C}^n$, получающийся аналитическим продолжением ростка f_a вдоль некоторой кривой вида $\pi \circ \gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C}^n$, где $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C}^n$ — кривая в пространстве Y, начинающаяся в точке $\gamma(0) = y_0$ и заканчивающаяся в точке $\gamma(1) = y$. *Для многозначной функции $\pi^*\mathscr{F}$ на пространстве Y определяется группа монодромии* (которая вполне может оказаться континуальной) *и монодромная пара ростка f_a* этой функции в точке y_0 — точно так же, как это делалось для $\mathscr{S}$-функций.

Обозначим через L_a совокупность всех ростков функции f в точке a, являющихся значениями многозначной функции $\pi^*\mathscr{F}$ в точке y_0. Группа монодромии M функции $\pi^*\mathscr{F}$ является транзитивной группой взаимно однозначных преобразований множества L_a. Нам нужно связать пару M_0, M, в которой M_0 — стационарная подгруппа ростка f_a в группе M, с монодромной парой $\mathscr{S}$-функции f. Для этого нам понадобятся описанные ниже отождествления.

Пусть O — множество особых точек функции f и $x \notin O$ — любая неособая точка в пространстве $\mathbb{C}^n$. Обозначим через X множество всех ростков функции f в точке x. Фиксируем кривую $\delta\colon [0, 1] \to \mathbb{C}^n$, соединяющую точки a и x, $\delta(0) = a$, $\delta(1) = x$, и пересекающую множество особенностей функции f лишь, может быть, в начальный момент, т. е. $\delta(t) \notin O$ при $t > 0$. Существование такой кривой δ вытекает из леммы о снятии кривой с тощего множества. Каждый из ростков функции f, лежащих в множестве L_a, аналитически продолжается вдоль кривой δ. Действительно, ряд Тейлора каждого ростка из множества L_a сходится в точках $\delta(t)$ кривой δ при достаточно малых t, $0 \leqslant t \leqslant t_0$. При $t \geqslant t_0$ никаких препятствий к продолжению ростка не возникает, так как по условию при $t > 0$ точки $\gamma(t)$ не лежат в множестве O.

Отождествим каждый росток f_{ia} из множества L_a с ростком функции f_{ix} в точке x, полученным при продолжении ростка f_{ia} вдоль кривой δ. При этом множество L_a отождествится с некоторым подмножеством L_x в множестве X, выделенный росток f_a отождествится с некоторым выделенным ростком $f_x \in X$, группа монодромии M функции $\pi^*\mathscr{F}$ отождествится с некоторой группой $M(x)$ транзитивных преобразований множества L_x, а стационарная подгруппа ростка f_a в M отождествится со стационарной подгруппой $M_0(x)$ ростка f_x в группе $M(x)$. Обозначим через G группу монодромии функции f, рассматриваемую как группу транзитивных взаимно однозначных преобразований множества X в себя. Через G_0 обозначим стационарную подгруппу ростка f_x в группе G.

Группы G_0, G мы рассматриваем как группы преобразований множества X, содержащего подмножество $L_x \subset X$.

Теорема 3.8. *Индуцированное замыкание $\overline{G}(S)$ группы монодромии G функции f в группе $S = S(L_x)$ взаимно однозначных преобразований множества L_x содержит группу монодромии $M(x)$ функции $\pi^*\mathscr{F}$. При этом стационарная подгруппа $M_0(x)$ равна пересечению группы $M(x)$ с индуцированным замыканием $\overline{G}_0(S)$ стационарной подгруппы G_0 ростка f_x в группе G.*

Доказательство. Если росток g аналитической функции аналитически продолжается вдоль некоторой кривой $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C}^n$, то он аналитически продолжается вдоль всякой кривой $\tilde{\gamma}$ с теми же концами, $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$, $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$, достаточно близкой к кривой γ. При этом продолжения ростка g вдоль кривых γ и $\tilde{\gamma}$ приводят к одному и тому же результату. Доказательство теоремы основано на этом аналитическом факте. Ввиду принятых отождествлений каждое преобразование $m\colon L_x \to L_x$ из группы $M(x)$ получается одновременным аналитическим продолжением ростков из множества L_x

вдоль некоторой кривой γ вида $\delta\gamma_1\delta^{-1}$, где δ^{-1} — кривая δ, пройденная в обратном порядке, а кривая γ_1 является образом при отображении π некоторой кривой $\gamma_2\colon [0,1]\to Y$ в пространстве Y, начинающейся и заканчивающейся в точке y_0. Концы кривой γ лежат в точке $x\in\mathbb{C}^n$, но кривая γ, вообще говоря, пересекает множество O особых точек функции f. Фиксируем любое конечное множество K ростков в L_x. Продеформируем немного кривую γ, оставляя закрепленными ее концы таким образом, чтобы не изменить аналитические продолжения конечного множества K ростков вдоль кривой, и так, чтобы продеформированная кривая $\tilde{\gamma}$ не пересекала множество O. Это можно сделать, учитывая аналитический факт, приведенный в начале доказательства, и лемму о снятии кривой с тощего множества.

Вдоль кривой $\tilde{\gamma}$ можно аналитически продолжать все ростки из множества X, так как кривая $\tilde{\gamma}$ не пересекает множество O. Соответствующее кривой $\tilde{\gamma}$ преобразование $g\colon X\to X$ принадлежит группе монодромии G функции f. Итак, мы для окрестности U_K преобразования $m\colon L_x\to L_x$, лежащего в группе $M(x)$, предъявили преобразование $g\colon X\to X$ из группы G, такое что $m|_K = g|_K$. Поэтому $M(x)\subset\bar{G}(S)$.

Далее, подгруппа $M_0(x)$ состоит из преобразований группы $M(x)$, переводящих точку f_x в себя. Для конечных множеств $K\subset L_x$, содержащих точку f_x, всякое преобразование $g\colon X\to X$, совпадающее на множестве K с некоторым преобразованием $m\colon L\to L$, где $m\in M_0$, тоже переводит точку f_x в себя. Поэтому $M_0 = M\cap\bar{G}_0(S)$.

Теорема доказана. □

3.5. Классы пар групп. В одномерном варианте топологической теории Галуа описывается, как изменяются монодромные пары функций одной переменной при суперпозициях, интегрированиях, дифференцированиях и т. д. Для этого используются некоторые понятия, связанные с парами групп (см. п. 5.5, 7.1 главы 5). Для функций многих переменных в связи с теоремой из п. 3.4 эти понятия необходимо несколько модифицировать. Напомним определения и проведем нужную модификацию.

Парой групп мы всегда называем пару, состоящую из группы и некоторой ее подгруппы, при этом *группа отождествляется с парой групп, состоящей из этой группы и ее единичной подгруппы.*

Определение. Совокупность $\mathscr{L}$ пар называется *почти полным классом пар групп*, если для каждой пары групп $[\Gamma, \Gamma_0] \in \mathscr{L}$, где $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$,

1) для любого гомоморфизма $\tau : \Gamma \to G$, где G — некоторая группа, пара групп $[\tau\Gamma, \tau\Gamma_0]$ также содержится в $\mathscr{L}$;

2) для любого гомоморфизма $\tau : G \to \Gamma$, где G — некоторая группа, пара групп $[\tau^{-1}\Gamma, \tau^{-1}\Gamma_0]$ также содержится в $\mathscr{L}$;

3) для любой группы G, наделенной T_2-топологией и содержащей группу Γ, $\Gamma \subseteq G$, пара групп $[\bar\Gamma, \bar\Gamma_0]$ также содержится в $\mathscr{L}$, где $\bar\Gamma, \bar\Gamma_0$ — замыкания групп Γ, Γ_0 в группе G.

Определение. Почти полный класс пар групп $\mathscr{M}$ называется *полным*, если

1) для каждой пары групп $[\Gamma, \Gamma_0] \in \mathscr{M}$ и группы Γ_1, такой что $\Gamma_0 \subseteq \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma$, пара групп $[\Gamma, \Gamma_1]$ также содержится в $\mathscr{M}$;

2) для каждых двух пар групп $[\Gamma, \Gamma_1]$, $[\Gamma_1, \Gamma_2] \in \mathscr{M}$, таких что $\Gamma_2 \subseteq \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma$, пара групп $[\Gamma, \Gamma_2]$ также содержится в $\mathscr{M}$.

Минимальные почти полный и полный классы пар групп, содержащие фиксированное множество пар групп $\mathscr{B}$, будем обозначать $\mathscr{L}\langle\mathscr{B}\rangle$ и $\mathscr{M}\langle\mathscr{B}\rangle$ соответственно. Пусть $\mathscr{K}$ — класс всех конечных групп, $\mathscr{A}$ — класс всех абелевых групп, $S(k)$ — группа всех перестановок k элементов. Минимальные полные классы пар групп $\mathscr{M}\langle\mathscr{A}, \mathscr{K}\rangle$, $\mathscr{M}\langle\mathscr{A}, S(k)\rangle$ и $\mathscr{M}\langle\mathscr{A}\rangle$ называются *почти разрешимыми, k-разрешимыми* и *разрешимыми* классами пар групп соответственно. Эти классы пар групп важны в теории Галуа. Они допускают следующее явное описание.

Цепочка подгрупп Γ_i, $i = 1, \ldots, m$, $\Gamma = \Gamma_1 \supseteq \ldots \supseteq \Gamma_m \subseteq \Gamma_0$, называется *нормальной башней* пары групп $[\Gamma, \Gamma_0]$, если группа Γ_{i+1} является нормальным делителем группы Γ_i при каждом $i = 1, \ldots, m-1$. Совокупность факторгрупп Γ_i/Γ_{i+1} называется совокупностью *делителей относительно нормальной башни*.

Теорема о классах пар $\mathscr{M}\langle\mathscr{A}, \mathscr{K}\rangle$, $\mathscr{M}\langle\mathscr{A}, S(n)\rangle$ и $\mathscr{M}\langle\mathscr{A}\rangle$ (см. теорему 7.5 из главы 5). 1. *Пара групп почти разрешима, если и только если она обладает нормальной башней, каждый делитель относительно которой является или конечной, или коммутативной группой.*

2. *Пара групп k-разрешима, если и только если она обладает нормальной башней, каждый делитель относительно которой является или подгруппой группы $S(k)$, или коммутативной группой.*

3. *Пара групп разрешима, если и только если группа монодромии этой пары разрешима* (группой монодромии пары групп $[\Gamma, \Gamma_0]$ называется факторгруппа группы Γ по наибольшему нормальному делителю, лежащему в группе Γ_0).

Усилим свойство 3 из определения почти полного класса пар групп.

3′) Для всякого почти гомоморфизма $J\colon \Gamma \to T$ около группы S пара групп $[\bar{\Gamma}(S), \bar{\Gamma}_0(S)]$ также содержится в $\mathscr{L}$, где $\bar{\Gamma}(S), \bar{\Gamma}_0(S)$ — индуцированные замыкания групп Γ, Γ_0 в группе S при почти гомоморфизме J.

Определение. *I-почти полный класс пар групп, I-полный класс пар групп, классы $I\mathscr{L}\langle\mathscr{B}\rangle$* и *$I\mathscr{M}\langle\mathscr{B}\rangle$* определяются так же, как почти полный класс пар групп, полный класс пар групп, классы $\mathscr{L}\langle\mathscr{B}\rangle$ и $\mathscr{M}\langle\mathscr{B}\rangle$ соответственно, нужно лишь во всех определениях свойство 3 заменить более сильным свойством 3′.

Утверждение 3.9. *Верны равенства $I\mathscr{M}\langle\mathscr{A},\mathscr{K}\rangle = \mathscr{M}\langle\mathscr{A},\mathscr{K}\rangle$, $I\mathscr{M}\langle\mathscr{A}, S(k)\rangle = \mathscr{M}\langle\mathscr{A}, S(k)\rangle$ и $I\mathscr{M}\langle\mathscr{A}\rangle = \mathscr{M}\langle\mathscr{A}\rangle$.*

Доказательство немедленно вытекает из явного описания классов $\mathscr{M}\langle\mathscr{A},\mathscr{K}\rangle$, $\mathscr{M}\langle\mathscr{A}, S(k)\rangle$ и $\mathscr{M}\langle\mathscr{A}\rangle$ и из теорем 3.5 и 3.6 п. 3.2 об индуцированных замыканиях.

Теорема 3.10. *Монодромная пара всякой многозначной функции, индуцированной при некотором непрерывном отображении $\mathscr{S}$-функцией f, принадлежит минимальному I-почти полному классу пар групп, содержащему монодромную пару функции f. В частности, если $\mathscr{S}$-функция f обладает разрешимой группой монодромии* (*почти разрешимой монодромной парой, k-разрешимой монодромной парой*), *то этим же свойством обладает группа монодромии* (*монодромная пара*) *всякой многозначной функции, индуцированной при некотором непрерывном отображении функцией f.*

Доказательство вытекает из теоремы 3.8 пункта 3.4 и из замкнутости классов $\mathscr{M}\langle\mathscr{A},\mathscr{K}\rangle$, $\mathscr{M}\langle\mathscr{A}, S(k)\rangle$ и $\mathscr{M}\langle\mathscr{A}\rangle$ относительно операции индуцированного замыкания.

§ 4. Многомерные результаты о непредставимости функций в квадратурах

В этом параграфе описываются топологические препятствия к представимости функций многих переменных в квадратурах. Аналогичные результаты для функции одной переменной описаны в главе 5 настоящей книги.

В § 4 главы 5 построен обширный класс бесконечнозначных функций одной переменной, для которых определена группа монодромии. Существует ли достаточно широкий класс ростков бесконечнозначных функций многих переменных (содержащий ростки функций, представимых в обобщенных квадратурах, и ростки целых функций многих переменных и замкнутый относительно естественных операций, таких как операция суперпозиций), обладающих аналогичным свойством? В этом параграфе определяется класс $\mathscr{SC}$-ростков, дающий положительный ответ на этот вопрос. Доказательство использует результаты о продолжаемости многозначных аналитических функций вдоль их множеств ветвления (см. § 2).

Основная теорема (см. п. 4.5) описывает изменения групп монодромий $\mathscr{SC}$-ростков, которые происходят в результате применения к росткам естественных операций. Она очень близка к соответствующей одномерной теореме (см. § 6 главы 5), но использует также новые результаты аналитического (см. § 2) и теоретико-группового (см. § 3) характера. Как следствие получаются топологические результаты о неразрешимости уравнений в явном виде, более сильные, чем аналогичные классические теоремы.

4.1. Формулы, их мультиростки, аналитические продолжения и римановы поверхности. Мы рассматриваем лиувиллевские классы аналитических функций многих переменных, представимых явными формулами, в частности класс функций, представимых в квадратурах (обобщенных квадратурах, k-квадратурах), класс элементарных (обобщенных элементарных) функций (см. введение к этой главе). Для каждой формулы можно определить мультиросток, содержащий ростки всех функций, фигурирующих в этой формуле (см. п. 4.3).

Можно говорить об аналитическом продолжении мультиростка формулы вдоль кривой (являющемся, в сущности, аналитическим продолжением ростков, фигурирующих в этой формуле, вдоль различных кривых, связанных этой формулой между собой). Можно определить понятие римановой поверхности формулы, говорить об $\mathscr{S}$-свойстве формулы и т. д. Мы подробно обсудим эти определения для случая простейшей формулы $y = f \circ G$. Чтобы не загромождать текст, для более сложных формул аналогичные определения не приводятся. О чем идет речь, ясно из разбираемого ниже примера. Росток аналитической функции (вообще говоря, многозначной) мы иногда обозначаем той же буквой, что и саму функцию, не уточняя в обозначении, о какой точке и о каком ростке функции в этой точке идет речь, если это ясно из контекста.

Рассмотрим композицию ростка аналитического отображения G связного аналитического многообразия M в $\mathbb{C}^n$ и ростка аналитической функции $f\colon \mathbb{C}^n \to C$. *Мультиростком формулы* $y = f \circ G$ называется тройка ростков $\{y_b | G_b, f_a\}$, где y_b, G_b — ростки в точке $b \in M$ аналитической функции y и аналитического отображения $G\colon (M, b) \to (\mathbb{C}^n, a)$, f_a — росток в точке $a \in \mathbb{C}^n$ аналитической функции f, для которых справедлива формула $y_b = f_a \circ G_b$.

Пусть $\gamma\colon [0,1] \to M$, $\gamma(0) = b$, — параметризованная кривая на многообразии M. Рассмотрим параметризованную кривую $G_{\gamma(t)} \circ \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^n$ в пространстве $\mathbb{C}^n$, переводящую точку t, $1 \leqslant t \leqslant 1$, в точку $G_{\gamma(t)} \circ \gamma(t)$, где $G_{\gamma(t)}$ — результат аналитического продолжения ростка G_b вдоль кривой $\gamma\colon [0,t] \to M$. *Аналитическим продолжением мультиростка* $\{y_{b_1} | G_{b_1}, f_{a_1}\}$ *формулы* $y = f \circ G$ вдоль кривой $\gamma\colon [0,1] \to M$, $\gamma(0) = b_1$, $\gamma(1) = b_2$, называется тройка $\{y_{b_2} | G_{b_2}, f_{a_2}\}$, где y_{b_2} и G_{b_2} — ростки, полученные аналитическим продолжением ростков y_{b_1} и G_{b_1} вдоль кривой γ, и f_{a_2} — росток, полученный аналитическим продолжением ростка f_{a_1} вдоль кривой $G_{\gamma(t)} \circ \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^n$. Очевидно, что эти ростки связаны соотношением $y_{b_2} = f_{a_2} \circ G_{b_2}$.

Скажем, что два мультиростка формулы $y = f \circ G$ эквивалентны, если один мультиросток получается из другого аналитическим продолжением вдоль некоторой кривой. Как множество точек *риманова поверхность* R формулы $y = f \circ G$ — это совокупность всех мультиростков, эквивалентных заданному мультиростку $\{y_b | G_b, f_a\}$. Определена *естественная проекция* $\pi\colon R \to M$ римановой поверхности формулы $y = f \circ G$ на многообразие M, сопоставляющая мультиростку $\{y_{b_1} | G_{b_1}, f_{a_1}\}$ точку $b_1 \in M$. По малой окрестности U точки b_1 на многообразии M можно определить окрестность $\widetilde{U}$ мультиростка $\tilde{b}_1 = \{y_{b_1} | G_{b_1}, f_{a_1}\}$ на римановой поверхности R. Для этого нужно, чтобы окрестность U лежала в некоторой координатной окрестности точки b_1 на многообразии M, чтобы в области U ряд Тейлора ростка $G_{b_1}\colon M \to \mathbb{C}^n$ сходился к некоторому отображению

$\widetilde{G}\colon U \to \mathbb{C}^n$ и чтобы образ $\widetilde{G}(U) \subset \mathbb{C}^n$ окрестности U при отображении $\widetilde{G}$ лежал в области сходимости ряда Тейлора ростка f_{a_1}. Если эти условия выполнены, то окрестность $\widetilde{U}$ мультиростка $\tilde{b}_1$ на римановой поверхности R определяется как множество мультиростков $\{y_{b_2} | G_{b_2}, f_{a_2}\}$, где $b_2 \in U$, G_{b_2} — росток в точке b_2 отображения $\widetilde{G}$, f_{a_2} — росток в точке $a_2 = \widetilde{G}(b_2)$ функции $\tilde{f}$, равной сумме ряда Тейлора ростка f_{b_1}, и $y_{b_2} = f_{a_2} \circ G_{b_2}$.

Окрестности $\widetilde{U}$ описанного вида задают топологию на римановой поверхности R. В этой топологии естественная проекция $\pi\colon R \to M$ является локальным гомеоморфизмом R в M. При помощи локального гомеоморфизма π на поверхности R индуцируется структура комплексно-аналитического многообразия, которая по определению существует на многообразии M.

Риманова поверхность R формулы $y = f \circ G$ играет в точности ту же роль, что и риманова поверхность аналитической функции. А именно, мультиросток $\{y^*_{\tilde{b}} | G^*_{\tilde{b}}, f_a\}$ формулы $y^* = f \circ G^*$, где $G^* = \pi^* G$, однозначно аналитически продолжается на всю риманову поверхность R, и риманова поверхность R является максимальным многообразием, для которого это условие выполнено (это значит, что если $\pi_1\colon R_1 \to M$ — другое многообразие R_1 вместе с локальным гомеоморфизмом π_1 в M, для которого верен этот факт, то существует вложение $j\colon R_1 \to R$, коммутирующее с проекциями, т. е. $\pi_1 = \pi \circ j$).

Точка $b_2 \in M$ называется *особой* для мультиростка $\{y_{b_1} | G_{b_1}, f_{a_1}\}$ формулы $y = f \circ G$, если существует кривая $\gamma\colon [0, 1] \to M$, $\gamma(0) = b_1$, $\gamma(1) = b_2$, вдоль которой мультиросток не может быть регулярно продолжен, но для любого t, $0 \leqslant t < 1$, он регулярно продолжается вдоль укороченной кривой $\gamma\colon [0, t] \to M$. У эквивалентных мультиростков множества особых точек совпадают. Будем говорить, что формула $y = f \circ G$ обладает *$\mathscr{S}$-свойством*, если множество особых точек для любого ее мультиростка является тощим (см. п.3.1).

Кроме множества особых точек удобно рассматривать и другие множества, вне которых неограниченно продолжается мультиросток формулы. Тощее множество A называется *запрещенным множеством* для мультиростка формулы, если мультиросток регулярно продолжается вдоль кривой $\gamma(t)$, $\gamma(0) = a$, пересекающей множество A лишь, может быть, в начальный момент.

Следующая теорема доказывается точно так же, как аналогичная теорема об $\mathscr{S}$-функциях в одномерном случае (теорема 4.2 главы 5).

Теорема 4.1 (о запрещенном множестве). *Тощее множество является запрещенным множеством мультиростка формулы, если и только если оно содержит множество его особых точек. В частности, мультиросток формулы обладает некоторым запрещенным множеством, если и только если формула обладает $\mathscr{S}$-свойством.*

4.2. Класс $\mathscr{SC}$-ростков, его замкнутость относительно естественных операций. Ключевую роль для дальнейшего играет следующее определение.

Определение. Росток f_a аналитической функции f в точке a пространства $\mathbb{C}^n$ является *$\mathscr{SC}$-ростком*, если выполнено следующее условие. Для всякого связного комплексно-аналитического многообразия M, всякого аналитического отображения $G\colon M \to \mathbb{C}^n$ и всякого прообраза b точки a, $G(b)=a$, существует тощее множество $A \subset M$, такое что для всякой кривой $\gamma\colon [0, 1] \to M$, начинающейся в точке b, $\gamma(0)=b$, и пересекающей множество A лишь, может быть, в начальный момент, $\gamma(t) \notin A$ при $t > 0$, росток f_a аналитически продолжается вдоль кривой $G \circ \gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C}^n$.

Другими словами, росток f_a в точке $a \in \mathbb{C}^n$ является $\mathscr{SC}$-ростком, если для всякого аналитического отображения $G\colon M \to \mathbb{C}^n$ и всякой точки $b \in M$, такой что $G(b)=a$, мультиросток $\{y_b | G_b, f_a\}$ формулы $y = f \circ G$ обладает $\mathscr{S}$-свойством на многообразии M.

Утверждение 4.2. *Каждый росток $\mathscr{S}$-функции f одной переменной является $\mathscr{SC}$-ростком.*

Доказательство. Если отображение $G\colon M \to \mathbb{C}^1$ постоянно, то функция $f \circ G$ является константой. Если отображение G непостоянно, то в качестве тощего множества A достаточно взять множество $G^{-1}(O)$, где O — множество особенностей функции f. □

Утверждение 4.3. *Если $f_1, \ldots, f_m$ — $\mathscr{SC}$-ростки в точке $a \in \mathbb{C}^n$ и g — $\mathscr{SC}$-росток в точке $(f_1(a), \ldots, f_m(a))$ пространства $\mathbb{C}^m$, то $g(f_1, \ldots, f_m)$ — $\mathscr{SC}$-росток в точке a.*

Доказательство. Пусть $G\colon M \to \mathbb{C}^n$ — аналитическое отображение связного комплексного многообразия M в $\mathbb{C}^n$, и пусть $b \in M$ — такая точка, что $G(b)=a$. Так как ростки $f_1, \ldots, f_m$ в точке $a \in \mathbb{C}^n$ являются $\mathscr{SC}$-ростками, то для $i = 1, \ldots, m$ существует тощее множество $A_i \in M$, запрещенное для мультиростка формулы $y_i = f_i \circ G$. В качестве запрещенного множества для мультиростка формулы $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f} \circ G$, где $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — росток вектор-функции в точке $a \in \mathbb{C}^n$, достаточно взять множество $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$. Обозначим через $\pi\colon R \to M$ естественную проекцию римановой поверхности R формулы $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f} \circ G$ и обозначим через $\tilde{b}$ точку римановой поверхности R, соответствующую мультиростку $\{\boldsymbol{z}_b \,|\, G_b, \boldsymbol{f}_a\}$. Росток функции g в точке $c = (f_1(a), \ldots, f_m(a))$ пространства $\mathbb{C}^m$ является $\mathscr{SC}$-ростком. Поэтому в многообразии R существует тощее множество $B \subset R$, запрещенное для мультиростка $\{w_{\tilde{b}} \,|\, (\boldsymbol{f} \circ G \circ \pi)_{\tilde{b}}, g_c\}$ формулы $w = g \circ (\boldsymbol{f} \circ G \circ \pi)$. Для мультиростка $\{u_b \,|\, (\boldsymbol{f} \circ G)_b, g_c\}$ формулы $u = g \circ (\boldsymbol{f} \circ G)$ в качестве запрещенного множества достаточно взять тощее множество $A \cup \pi(B)$. □

Определение. Операцию $\aleph$, сопоставляющую ростку аналитической вектор-функции $\boldsymbol{f}$ в точке $a \in \mathbb{C}^n$ росток аналитической функции $\varphi = \aleph(f)$ в той же точке a, назовем *операцией с контролируемыми особенностями*, если при естественной проекции $\pi\colon R \to M$ ростка $\boldsymbol{f}$ римановой поверхности R у ростка $\pi^*\varphi$ существует запрещенное замкнутое аналитическое подмножество $A \subset R$ (т. е. росток $\pi^*\varphi$ аналитически продолжается вдоль любой кривой $\gamma\colon [0, 1] \to R$, $\gamma(0) = \tilde{a}$, где $\tilde{a}$ — точка на R, соответствующая ростку $\boldsymbol{f}$, пересекающей множество A лишь, может быть, в начальный момент, $\gamma(t) \notin A$ при $0 < t \leqslant 1$).

Утверждение 4.4. 1. *Для каждого $i = 1, \ldots, n$ операция дифференцирования, сопоставляющая ростку аналитической функции f в точке $a \in \mathbb{C}^n$ росток функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ в той же точке, является операцией с контролируемыми особенностями.*

2. *Операция интегрирования, сопоставляющая ростку вектор-функции $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ в точке $a \in \mathbb{C}^n$ росток в той же точке аналитической функции φ, для которого выполнено тождество $d\varphi = f_1\,dx_1 + \ldots + f_n\,dx_n$, является операцией с контролируемыми особенностями.*

Доказательство. Если росток функции f (формы $\alpha = f_1\,dx_1 + \ldots + f_n\,dx_n$) аналитически продолжается вдоль некоторой кривой в $\mathbb{C}^n$, то вдоль этой же кривой аналитически продолжаются частные производные ростка f (неопределенный интеграл формы α). Поэтому частная производная (неопределенный интеграл) вообще не имеет особенностей на римановой поверхности ростка функции f (ростка вектор-функции $\boldsymbol{f}$). □

Утверждение 4.5. *Операция решения алгебраического уравнения, сопоставляющая ростку вектор-функции* $\boldsymbol{f}=(f_0, \ldots, f_k)$ *в точке* $a\in\mathbb{C}^n$*, где* $f_0\not\equiv 0$*, росток* y *в той же точке, удовлетворяющий уравнению* $f_0y^k+\ldots+f_k=0$*, является операцией с контролируемыми особенностями.*

Доказательство. Рассмотрим поле K, порожденное ростками $f_0, \ldots, f_k$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. По определению росток y удовлетворяет алгебраическому уравнению $f_0y^k+\ldots+f_k=0$ над полем K, однако это уравнение может оказаться приводимым. Выберем неприводимое уравнение

$$Q_0y^l+\ldots+Q_l=0 \tag{22}$$

над полем K, которому удовлетворяет росток y. Можно считать, что коэффициенты $Q_0, \ldots, Q_l$ этого уравнения лежат в кольце над полем $\mathbb{C}$, порожденном ростками $f_0, \ldots, f_k$ (если это не так, то достаточно умножить коэффициенты этого уравнения на общий знаменатель). Коэффициенты $Q_0, \ldots, Q_l$ однозначно продолжаются на риманову поверхность R ростка вектор-функции $\boldsymbol{f}$.

Обозначим через $D(Q_0, \ldots, Q_l)$ дискриминант уравнения (22). Дискриминант не обращается в тождественный нуль на R, так как уравнение (22) неприводимо. Пусть $\Sigma_D\subset R$ — аналитическое множество, на котором дискриминант $D(Q_0, \ldots, Q_l)$ обращается в нуль. Пусть $\Sigma_0\subset R$ — аналитическое множество, на котором коэффициент Q_0 обращается в нуль. В качестве множества Σ достаточно взять множество $\Sigma=\Sigma_0\cup\Sigma_D$. □

Напомним, что система из N линейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$L_j(y)=\sum a^j_{i_1,\ldots,i_n}\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n}y}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}}=0, \quad j=1,\ldots,N, \tag{23}$$

на неизвестную функцию y, коэффициенты $a^j_{i_1,\ldots,i_n}$ которых — аналитические функции от n комплексных переменных $x_1, \ldots, x_n$, называется *голономной*, если пространство ростков ее решений в любой точке пространства $\mathbb{C}^n$ конечномерно.

Определение. *Операцией решения голономной системы уравнений* называется операция, сопоставляющая ростку вектор-функции $\boldsymbol{a}=(a^j_{i_1,\ldots,i_n})$ в точке a, компоненты которой — занумерованные в любом порядке коэффициенты голономной системы уравнений (23), росток y в точке a некоторого решения этой системы.

Утверждение 4.6. *Операция решения голономной системы уравнений является операцией с контролируемыми особенностями.*

Это утверждение вытекает из общих теорем о голономных системах.

Теорема 4.7. *Пусть $\boldsymbol{f}$ — росток аналитической вектор-функции в точке $a\in\mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{f}=(f_1, \ldots, f_N)$, компоненты $f_1, \ldots, f_N$ которого являются $\mathscr{SC}$-ростками. Пусть росток φ в точке $a\in\mathbb{C}^n$ получается из ростка $\boldsymbol{f}$ применением операции с контролируемыми особенностями. Тогда росток φ является $\mathscr{SC}$-ростком.*

Доказательство. Пусть $\pi\colon R\to\mathbb{C}^n$ — естественная проекция римановой поверхности R ростка $\boldsymbol{f}$ и $\tilde a\in R$ — отмеченная точка на R, соответствующая этому ростку, $\pi(\tilde a)=a$. По определению росток $\pi^*\varphi$ в точке $\tilde a\in R$ аналитически продолжается вдоль любой кривой на римановой поверхности R, пересекающей некоторое аналитическое множество $\Sigma\subset R$ лишь, может быть, в начальный момент. Фиксируем стратификацию Уитни пары (R, Σ), замыкание каждого страта которой является замкнутым комплексно-аналитическим множеством. Нас будут интересовать лишь страты, замыкания которых содержат отмеченную точку $\tilde a$ на римановой поверхности R. Пусть $\bar\Sigma_1$ — замыкание одного из таких стратов Σ_1, а Σ_1^0 — объединение всех стратов, кроме страта Σ_1, лежащих в $\bar\Sigma_1$. Согласно результату § 2 росток $\pi^*\varphi$ аналитически продолжается вдоль любой кривой $\gamma\colon[0, 1]\to\Sigma_1$, $\gamma(0)=\hat a$, пересекающей множество Σ_1^0 лишь, может быть, в начальный момент. Отсюда и вытекает теорема.

Действительно, пусть $G\colon M\to\mathbb{C}^n$ — аналитическое отображение связного комплексного многообразия M в $\mathbb{C}^n$, и пусть $b\in M$ — такая точка, что $G(b)=a$. Так как все компоненты ростка вектор-функции $\boldsymbol{f}$ являются $\mathscr{SC}$-ростками, то существует тощее множество $A\subset M$, запрещенное для мультиростка $\{\boldsymbol{y}_b\,|\,G_b, \boldsymbol{f}_a\}$ формулы $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}\circ G$. Пусть $\pi_1\colon R_1\to M$ — естественная проекция римановой поверхности R_1 этой формулы и $\tilde b\in R_1$ — отмеченная точка на M_1, соответствующая этому ростку. На риманову поверхность R_1 аналитически продолжается росток $\pi^{-1}G\pi_1$ в точке $\tilde b\in R_1$ отображения поверхности R_1 в поверхность R, переводящий точку $\tilde b$ в точку $\tilde a$. Полученное аналитическим продолжением отображение будем обозначать символом $\widetilde G\colon R_1\to R$. Пусть $\bar\Sigma_1$ — наименьшее из замыканий стратов стратификации Уитни пары (R, Σ), содержащее образ $\widetilde G(R_1)$ многообразия R_1. Пусть Σ_1^0 — объединение всех стратов, кроме страта Σ_1, лежащих в $\bar{\bar{\Sigma}}_1$. Множество $B \subset R_1$, где $B = \widetilde{G}^{-1}(\Sigma_1^0)$, является собственным аналитическим подмножеством в R_1. Согласно [43], росток φ_a аналитически продолжается вдоль образа $G \circ \pi_1 \circ \gamma \colon [0, 1] \to \mathbb{C}^n$ всякой кривой $\gamma \colon [0, 1] \to M_1$, $\gamma(0) = \tilde{b}$, пересекающей множество B лишь, может быть, в начальный момент. Поэтому множество $A \cup \pi_1(B) \subset M$ является запрещенным для мультиростка $\{y_c | G_c, \varphi_a\}$ формулы $y = \varphi \circ G$. Теорема доказана. □

Следствие 4.8. *Пусть множество особенностей многозначной аналитической функции в $\mathbb{C}^n$ является замкнутым аналитическим множеством. Тогда каждый росток этой функции является $\mathcal{S}\mathcal{C}$-ростком.*

Доказательство. По определению росток такой функции в точке $a \in \mathbb{C}^n$ можно рассматривать как результат применения операции с контролируемыми особенностями к ростку в точке a вектор-функции $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, компоненты которой — координатные функции. □

Теорема 4.9 (о замкнутости класса $\mathcal{S}\mathcal{C}$-ростков). *Класс $\mathcal{S}\mathcal{C}$-ростков содержит все ростки $\mathcal{S}$-функций одной переменной и все ростки $\mathcal{S}$-функций многих переменных, имеющих аналитические множества особых точек.*

Класс $\mathcal{S}\mathcal{C}$-ростков в $\mathbb{C}^n$ замкнут относительно операций суперпозиции с $\mathcal{S}\mathcal{C}$-ростками функции m переменных, дифференцирования, интегрирования, решения алгебраических уравнений и решения голономных систем линейных дифференциальных уравнений.

Доказательство. Принадлежность ростков $\mathcal{S}$-функций, о которых говорится в теореме 4.9, классу $\mathcal{S}\mathcal{C}$-ростков доказана в утверждении 4.2 и в следствии 4.8. Замкнутость класса $\mathcal{S}\mathcal{C}$-ростков относительно суперпозиций доказана в утверждении 4.3. Замкнутость класса $\mathcal{S}\mathcal{C}$-ростков относительно остальных операций вытекает из теоремы 4.7 в силу утверждений 4.4–4.6. □

Следствие 4.10. *Если росток функции f можно получить из ростков $\mathcal{S}$-функций, имеющих аналитические множества особенностей, и из ростков $\mathcal{S}$-функций одной переменной с помощью интегрирования, дифференцирования, арифметических операций, суперпозиций, решения алгебраических уравнений и решения голономных систем линейных дифференциальных уравнений, то росток f является $\mathcal{S}\mathcal{C}$-ростком. В частности, росток, не являющийся $\mathcal{S}\mathcal{C}$-ростком, нельзя представить в обобщенных квадратурах.*

4.3. Класс мультиростков формул, обладающих $\mathscr{SC}$-свойством. Пусть класс $\mathscr{A}$ ростков аналитических функций задан множеством основных ростков $\mathscr{B}$ и списком допустимых операций $\mathscr{D}$. Пусть список $\mathscr{D}$ содержит лишь операции, перечисленные во введении к этой главе. По определению каждый росток класса $\mathscr{A}$ выражается через множество основных ростков при помощи формул, содержащих допустимые операции. Приведем индуктивное определение мультиростков формул такого вида.

Мультиросток простейшей *формулы* Ω*, означающей принадлежность ростка* φ *множеству основных ростков,* по определению, *состоит из ростков* φ *и* g*, где* g *— элемент множества* $\mathscr{B}$*, и равенства* $\varphi = g$, т. е. $\Omega = \{\varphi \,|\, g \,|\, \varphi = g\}$.

Пусть росток φ в точке $a \in \mathbb{C}^n$ выражается через ростки в точке a функций $f_1, \ldots, f_m$ при помощи одной из операций 1–8 из п. 1.2, 1.3 введения к настоящей главе или при помощи решения системы голономных уравнений. Пусть $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ — мультиростки формул, выражающих $f_1, \ldots, f_m$ через множество основных ростков. Тогда *мультиросток формулы, выражающей росток* φ*, — это набор, состоящий из ростка* φ*, из мультиростков всех формул* $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ *и из тождества, соответствующего рассматриваемой операции*. Например, если φ получается из $f_1, \ldots, f_m$ при помощи решения алгебраического уравнения $\varphi^m + f_1\varphi^{m-1} + \ldots + f_m = 0$, то $\Omega = \{\varphi \,|\, \Omega_1, \ldots, \Omega_m \,|\, \varphi^m + f_1\varphi^{m-1} + \ldots + f_m = 0\}$.

Если росток φ *в точке* $a \in \mathbb{C}^n$ *выражается через ростки в точке* a *функций* $f_1, \ldots, f_m$ *и через росток в точке* $b = (f_1(a), \ldots, f_m(a)) \in \mathbb{C}^m$ *функции* g *при помощи суперпозиции, то мультиросток* Ω *формулы, выражающей* φ*, — это* $\Omega = \{\varphi \,|\, \Omega_1, \ldots, \Omega_m, \Omega_0 \,|\, \varphi = g(f_1, \ldots, f_m)\}$, где при $i = 1, \ldots, m$ Ω_i — мультиросток формулы для ростка в точке a функции f_i и Ω_0 — мультиросток формулы для ростка в точке b функции g. (Из-за операции суперпозиции мультиростки формул могут содержать ростки функций в разных пространствах.)

Для мультиростка формулы Ω, представляющей росток φ в точке $a \in \mathbb{C}^n$, понятия *аналитического продолжения* и *римановой поверхности* определяются точно так же, как это делалось в п. 4.1 для формулы $y = f \circ G$. Отметим, что риманова поверхность R формулы Ω расположена над пространством $\mathbb{C}^n$ (т. е. определена естественная проекция $\pi \colon R \to \mathbb{C}^n$), хотя в ней могут фигурировать ростки функций разного числа переменных.

Повторяя определение из п. 4.2, скажем, что мультиросток Ω формулы, выражающей росток функции φ в точке $a \in \mathbb{C}^n$ через основные ростки, обладает *$\mathcal{SC}$-свойством*, если выполнено следующее условие. Для всякого связного комплексно-аналитического многообразия M, всякого аналитического отображения $G\colon M \to \mathbb{C}^n$ и всякого прообраза b точки a, $G(b) = a$, существует тощее множество $A \subset M$, такое что для всякой кривой $\gamma\colon [0, 1] \to M$, начинающейся в точке b, $\gamma(0) = b$, и пересекающей множество A лишь, может быть, в начальный момент, $\gamma(t) \notin A$ при $t > 0$, мультиросток формулы Ω аналитически продолжается вдоль кривой $G \circ \gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C}^n$.

Теорема 4.11. 1. *Пусть класс ростков $\mathcal{A}$ задан множеством $\mathcal{B}$ основных ростков, содержащим лишь $\mathcal{SC}$-ростки, и списком допустимых операций $\mathcal{D}$, содержащим лишь операции, перечисленные в п.* 3.1, *и операцию решения системы голономных уравнений. Тогда для каждого ростка из этого класса любая формула, выражающая этот росток через основные ростки при помощи допустимых операций, обладает $\mathcal{SC}$-свойством.*

2. *Если дополнительно множество $\mathcal{B}$ основных ростков замкнуто относительно операции аналитического продолжения, то для всякого ростка $\varphi_a \in \mathcal{A}$, заданного в точке a пространства $\mathbb{C}^n$, существует запрещенное множество $A \subset \mathbb{C}^n$, такое что в каждой точке $b \notin A$ каждый росток φ_b, эквивалентный ростку φ_a, тоже принадлежит классу $\mathcal{A}$ (и выражается через основные ростки в некотором смысле той же формулой, что и росток φ).*

Доказательство. Для доказательства п. 1 достаточно повторить рассуждения из п. 4.2 (заменяя ростки функций на мультиростки формул).

Докажем пункт 2. Согласно п. 1 мультиросток формулы Ω, выражающей росток φ_a через ростки основных функций, обладает $\mathcal{SC}$-свойством и, в частности, имеет тощее запрещенное множество A. Пусть росток φ_b получается из ростка φ_a аналитическим продолжением вдоль кривой γ. Можно считать, что $\gamma(t)$ не принадлежит множеству A при $0 < t \leqslant 1$ (см. лемму 3.1 о снятии кривой с тощего множества из § 3). При аналитическом продолжении мультиростка формулы Ω получается мультиросток формулы, выражающей мультиросток φ_b при помощи допустимых операций через основные ростки, так как множество основных ростков замкнуто относительно аналитического продолжения. □

В условиях п. 2 теоремы мы имеем следующую альтернативу. Для всякой многозначной аналитической функции φ либо ни один из ее ростков не принадлежит классу $\mathscr{A}$, либо все ее ростки вне некоторого тощего множества принадлежат этому классу (и выражаются через основные ростки «одной и той же» формулой). В первом случае мы будем говорить, что функция φ *не выражается через основные ростки при помощи допустимых операций*, во втором — что такое *представление существует*. В частности, определены понятия *представимости многозначной аналитической функции в квадратурах, k-квадратурах и обобщенных квадратурах*.

4.4. Топологические препятствия к представимости функций в квадратурах. Фиксируем некоторый непустой I-почти полный класс пар групп IM (см. § 3). Обозначим через $\widehat{IM}$ класс $\mathscr{SC}$-ростков аналитических функций (в точках всех пространств $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, одновременно), монодромная пара которых принадлежит классу пар групп IM.

Основная теорема. *Класс ростков $\widehat{IM}$ содержит $\mathscr{SC}$-ростки всех однозначных функций и замкнут относительно суперпозиций и дифференцирований. Кроме того,*

1) *если класс IM содержит группу $\mathbb{C}$ комплексных чисел по сложению, то класс $\widehat{IM}$ замкнут относительно интегрирований*;

2) *если класс IM содержит группу $S(k)$ перестановок k элементов, то класс $\widehat{IM}$ замкнут относительно решения алгебраических уравнений степени не выше k.*

Доказательство заключается в анализе изменений монодромных пар ростков функции, которые происходят при перечисленных в теореме операциях. Оно повторяет доказательство аналогичной теоремы про $\mathscr{S}$-функции одной переменной (см. § 6 главы 5). Поэтому мы ограничимся перечислением отличий этих доказательств. Во-первых, теорема о замкнутости класса $\mathscr{SC}$-ростков (см. п. 4.2) сложнее аналогичной одномерной теоремы. Она опирается на результаты § 2. Во-вторых, операция суперпозиции в многомерной ситуации связана с новой операцией над парами групп — с операцией индуцированного замыкания. Этот круг вопросов подробно описан в § 3.

Результат о квадратурах. *Группа монодромии ростка функции f, представимой в квадратурах, разрешима. Более того, разрешима группа монодромии всякого ростка функции f, представимого через* *ростки однозначных $\mathscr{S}$-функций, имеющих аналитические множества особых точек, и ростки однозначных $\mathscr{S}$-функций одной переменной при помощи интегрирований, дифференцирований и суперпозиций.*

Результат о k-квадратурах. *Монодромная пара ростка функции f, представимой в k-квадратурах, k-разрешима* (см. главу 5). *Более того, k-разрешима монодромная пара всякого ростка функции f, представимого через ростки однозначных $\mathscr{S}$-функций, имеющих аналитические множества особых точек, и ростки однозначных $\mathscr{S}$-функций одной переменной при помощи интегрирований, дифференцирований, суперпозиций и решения алгебраических уравнений степени не выше k.*

Результат об обобщенных квадратурах. *Монодромная пара ростка функции f, представимой в обобщенных квадратурах, почти разрешима* (см. главу 5). *Более того, почти разрешима монодромная пара всякого ростка функции f, представимого через ростки однозначных $\mathscr{S}$-функций, имеющих аналитические множества особых точек, и ростки однозначных $\mathscr{S}$-функций одной переменной при помощи интегрирований, дифференцирований, суперпозиций и решения алгебраических уравнений.*

Доказательство. Перечисленные выше результаты вытекают из основной теоремы, так как упомянутые в них ростки являются $\mathscr{S}\mathscr{C}$-ростками (см. п. 4.2), а классы пар групп, имеющих соответственно разрешимую, k-разрешимую и почти разрешимую группу монодромии, содержат группу $\mathbb{C}$ по сложению. Два последних класса пар групп, кроме того, содержат соответственно группу $S(k)$ и все группы $S(m)$ при $0<m<\infty$ (см. главу 5). □

Из теории Галуа легко вытекает следующая

Теорема. *Решения алгебраического уравнения $y^m+r_1y^{m-1}+\ldots$ $\ldots+r_m=0$, в котором r_i — рациональные функции n переменных, выражаются при помощи радикалов (при помощи радикалов и решений алгебраических уравнений степени не выше k), если и только если его группа монодромии разрешима (k-разрешима).*

Наша теорема позволяет усилить отрицательные результаты в этой теореме.

Следствие 4.12. *Если группа монодромии алгебраического уравнения*

$$y^k+r_1y^{k-1}+\ldots+r_k=0,$$

в котором r_i — рациональные функции от n переменных, неразрешима, то никакой росток его решения не только нельзя выразить в радикалах, но его нельзя представить через ростки однозначных $\mathcal{S}$-функций, имеющих аналитические множества особых точек, при помощи интегрирований, дифференцирований и суперпозиций.

Справедлив следующий вариант классической теоремы Абеля, который сильнее всех известных результатов в этом направлении.

Теорема 4.13 (ср. [2], [38]). *При $n \geqslant 5$ никакой росток решения общего алгебраического уравнения $y^n + x_1 y^{n-1} + \ldots + x_n = 0$, в котором $x_1, \ldots, x_n$ — независимые переменные, нельзя выразить через ростки элементарных функций, ростки однозначных $\mathcal{S}$-функций, имеющих аналитические множества особых точек, и ростки однозначных $\mathcal{S}$-функций одной переменной при помощи суперпозиций, интегрирований, дифференцирований и решения алгебраических уравнений степени меньше чем n.*

4.5. Группа монодромии голономной системы линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим голономную систему из N линейных дифференциальных уравнений

$$L_j(y) = \sum a^j_{i_1, \ldots, i_n} \frac{\partial^{i_1 + \ldots + i_n} y}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} = 0, \quad j = 1, \ldots, N,$$

на неизвестную функцию y, коэффициенты $a^j_{i_1, \ldots, i_n}$ которой — рациональные функции от n комплексных переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Как известно, существует особая алгебраическая гиперповерхность Σ для голономной системы в пространстве $\mathbb{C}^n$, обладающая следующим свойством. Каждое решение системы аналитически продолжается вдоль любой кривой, не пересекающей гиперповерхность Σ. Пусть V — конечномерное пространство решений голономной системы в окрестности точки x_0, не лежащей на гиперповерхности Σ. Возьмем произвольную кривую $\gamma(t)$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ с началом и концом в точке x_0, не проходящую через гиперповерхность Σ. Решения системы будут аналитически продолжаться вдоль кривой γ, оставаясь при этом решениями системы. Поэтому каждой такой кривой γ отвечает линейное отображение M_γ пространства решений V в себя. Совокупность линейных преобразований M_γ, соответствующих всем кривым γ, образует группу, которая называется *группой монодромии голономной системы*.

Колчин обобщил теорию Пикара—Вессио на случай систем голономных дифференциальных уравнений. Приведем следствия теории Колчина, относящиеся к разрешимости в квадратурах регулярных голономных систем дифференциальных уравнений. Как и в одномерном случае, голономная система называется *регулярной*, если при подходе к особому множеству Σ и при уходе на бесконечность ее решения растут не более чем степенным образом.

Теорема. *Регулярная голономная система линейных дифференциальных уравнений решается в квадратурах и в обобщенных квадратурах, если ее группа монодромии соответственно разрешима и почти разрешима.*

Теория Колчина доказывает тем самым два результата.

1. *Если группа монодромии регулярной голономной системы линейных дифференциальных уравнений разрешима* (*почти разрешима*), *то эта система уравнений решается в квадратурах* (*в обобщенных квадратурах*).

2. *Если группа монодромии регулярной голономной системы линейных дифференциальных уравнений неразрешима* (*не почти разрешима*), *то эта система уравнений не решается в квадратурах* (*в обобщенных квадратурах*).

Наша теория позволяет усилить второй (отрицательный) результат.

Теорема 4.14. *Если группа монодромии голономной системы линейных дифференциальных уравнений неразрешима* (*не почти разрешима*), *то каждый росток почти каждого решения этой системы уравнений нельзя выразить через ростки однозначных $\mathcal{S}$-функций, имеющих аналитические множества особых точек, при помощи суперпозиций, мероморфных операций, интегрирований и дифференцирований* (*при помощи суперпозиций, мероморфных операций, интегрирований, дифференцирований и решения алгебраических уравнений*).

4.6. Голономные системы линейных дифференциальных уравнений с малыми коэффициентами. Рассмотрим вполне интегрируемую систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$dy = Ay, \tag{24}$$

где $y = y_1, \ldots, y_n$ — неизвестная вектор-функция и A — $(n \times n)$-матрица, состоящая из дифференциальных 1-форм с рациональными коэффициентами в пространстве $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющая условию полной интегрируемости $dA + A \wedge A = 0$ и имеющая следующий вид:

$$A = \sum_{i=1}^{k} A_i \frac{dl_i}{l_i},$$

где A_i — постоянные матрицы, а l_i — линейные неоднородные функции на $\mathbb{C}^n$.

Если матрицы A_i одновременно приводятся к треугольному виду, то система (24), как и всякая вполне интегрируемая треугольная система, решается в квадратурах. Разумеется, встречаются разрешимые нетреугольные системы. Однако если матрица A_i достаточно мала, таких систем нет. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.15. *Нетреугольная вполне интегрируемая система* (24) *с достаточно малыми по модулю матрицами A_i сильно неразрешима, т. е. ее нельзя разрешить, даже если использовать ростки всех однозначных $\mathcal{S}$-функций, имеющих аналитические множества особых точек, суперпозиции, мероморфные операции, интегрирования, дифференцирования и решения алгебраических уравнений.*

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству следствия 2.14 из главы 6 (см. также п. 2.9 из главы 6). Нужно лишь ссылку на (одномерную) теорию Лаппо-Данилевского заменить ссылкой на многомерный вариант теории Лаппо-Данилевского из статьи [24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Э. Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Гос. научно-техн изд., 1939; М.: Факториал Пресс, 2005.

[2] В. Б. Алексеев. Теорема Абеля в задачах и решениях. М.: Изд-во МЦНМО, 2001.

[3] В. И. Арнольд. Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову и проблема топологической классификации особых точек аналитической системы дифференциальных уравнений // Функц. анализ и его прилож. 1970, Т. 4, вып. 3. С. 1–9.

[4] В. И. Арнольд, О. А. Олейник Топология действительных алгебраических многообразий // Вестник МГУ. Сер. 1, матем, механ. 1979, Т. 6. С. 7–17.

[5] В. И. Арнольд. Суперпозиции // А. Н. Колмогоров, Избранные труды, математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 444–451.

[6] В. И. Арнольд. Топологическое доказательство трансцендентности абелевых интегралов в «Математических началах натуральной философии» Ньютона // Историко-математические исследования. 1989, Т. 31. С. 7–17.

[7] V. I. Arnold, V. A. Vassiliev. Newton's *Principia* read 300 years later // Notices Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 36, № 9. P. 1148–1154. (Addendum: 1990. Vol. 37, № 2. P. 144).

[8] V. I. Arnold. Problémes rèsolubles et problémes irrèsolubles analytiques et gèomètriques // Passion des Formes. Dynamique Qualitative Sèmiophysique et Intelligibilitè. Dèdiè á R. Thom. Fontenay-St Cloud: ENS Èditions, 1994. P. 411–417.

[9] В. И. Арнольд. О некоторых задачах теории динамических систем // В. И. Арнольд — Избранное 60. М.: Фазис, 1997. С. 533–551.

[10] В. И. Арнольд. И. Г. Петровский. Топологические проблемы Гильберта и современная математика // Успехи матем. наук. 2002. Т. 157, вып. 4. С. 197–207.

[11] М. Берже. Геометрия: В 2 т. М.: Мир, 1984.

[12] А. А. Болибрух. Обратные задачи монодромии аналитической теории дифференциальных уравнений // Математические события XX века. М.: Фазис, 2003. С. 53–79.

[13] А. А. Болибрух. Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. М.: Изд-во МЦНМО, 2000.

[14] М. Горески, Р. Макферсон. Стратифицированная теория Морса. М.: Мир, 1991.

[15] А. Гурвиц, Р. Курант. Теория функций. М.: Наука, 1968.

[16] В. В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. 2-е изд. М.–Л.: ГТТИ, 1950.

[17] Дж. Дэвенпорт. Интегрирование алгебраических функций. М.: Мир, 1985.

[18] Ю. С. Ильяшенко, А. Г. Хованский. Теория Галуа систем дифференциальных уравнений типа Фукса с малыми коэффициентами. Препринт ИПМ АН СССР, № 117. М., 1974.

[19] И. Капланский. Введение в дифференциальную алгебру. М.: Мир, 1959.

[20] E. R. Kolchin. Algebraic matric groups and the Picard–Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations // Ann. of Math. 1948. Vol. 49. P. 1–42.

[21] E. R. Kolchin. Galois theory of differential fields // Amer. J. of Math. 1953. Vol. 75. P. 753–824.

[22] А. Г. Курош. Лекции по общей алгебре. М.: Физматгиз, 1962.

[23] И. А. Лаппо-Данилевский. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ГТТИ, 1957.

[24] В. П. Лексин. О задаче Римана—Гильберта для аналитических семейств представлений // Матем. заметки. 1991. Т. 50, вып. 2. С. 89–97.

[25] J. Liouville. Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébriques // J. École Polytech. Paris. 1833. Vol. 14. P. 124–193.

[26] J. Liouville. Mémoire sur l’intégration d’une classe de fonctions transcendentes // J. Reine Angew. Math. 1835. Vol. 13, № 2. P. 93–118.

[27] J. Liouville. Mémoire sur l’intégration d’une classe d’équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites // J. Math. Pures Appl. Ser. I. 1839. Vol. IV. P. 423–456.

[28] В. В. Прасолов. Неэлементарность некоторых интегралов элементарных функций // Математическое просвещение. Третья серия. М.: Изд-во МЦНМО, 2003. Вып. 7. С. 126–135.

[29] J. F. Ritt. Integration in finite terms. Liouville’s theory of elementary methods. N. Y.: Columbia Univ. Press, 1948.

[30] M. Rosenlicht. Liouville’s theorem of functions with elementary integrals // Pacific J. Math. 1968. Vol. 24. P. 153–161.

[31] M. Rosenlicht. On Liouville’s theory elementary of functions // Pacific J. Math. 1976. Vol. 65, № 2. P. 485–492.

[32] M. F. Singer. Formal solutions of differential equations // J. Symbolic comput. 1990. Vol. 10. P. 59–94.

[33] M. F. Singer. Liouvillian solutions of n-th order homogeneous linear differential equations // Amer. J. of Math. 1981. Vol. 103, № 4. P. 661–682.

[34] M. van der Put, M. F. Singer. Galois theory of linear differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[35] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.

[36] Б. А. Фукс. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. М.: Физматгиз, 1962.

[37] А. Г. Хованский. О представимости алгеброидных функций суперпози-

циями аналитических функций и алгеброидных функций одной переменной // Функц. анал. и его прил. 1970. Т. 4, вып. 2. С. 74–79.

[38] А. Г. Хованский. О суперпозициях голоморфных функций с радикалами // Успехи матем. наук. 1971, Т. 26, вып. 2. С. 213–214.

[39] А. Г. Хованский. О представимости функций в квадратурах // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26, вып. 4. С. 251–252.

[40] А. Г. Хованский. О представимости функций в квадратурах. Дис. … канд. физ.-матем. наук. М.: МИАН СССР им. В. А. Стеклова, 1973.

[41] A. Khovanskii. Topological obstructions for representability of functions by quadratures // Journal of dynamical and control systems. 1995. Vol. 1, № 1. P. 99–132.

[42] А. Г. Хованский. О продолжаемости многозначных аналитических функций на аналитическое подмножество // Функц. анал. и его прил. 2001. Т. 35, вып. 1. С. 62–73.

[43] А. Г. Хованский. О монодромии многозначной функции на ее множестве ветвления // Функц. анал. и его прил. 2003. Т. 37, вып. 2. С. 65–74.

[44] А. Г. Хованский. Многомерные результаты о непредставимости функций в квадратурах // Функц. анал. и его прил. 2003. Т. 37, вып. 4. С. 74–85.

[45] А. Г. Хованский. О разрешимости и неразрешимости уравнений в явном виде // Успехи матем. наук. 2004. Т. 59, вып. 4. С. 69–146.

[46] А. Г. Хованский, С. П. Чулков. Геометрия полугруппы $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, приложения к комбинаторике, алгебре и дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во МЦНМО, 2006.

[47] А. Г. Хованский. Теория Галуа, накрытия и римановы поверхности. М.: Изд-во МЦНМО, 2007.

[48] А. Г. Хованский. Интерполяционные полиномы и их применения в чистой математике. М.: Изд-во МЦНМО (в печати).

[49] А. Г. Хованский, О. А. Гельфонд. О вещественных функциях Лиувилля // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 52–53.

[50] А. Г. Хованский. Малочлены. М.: Фазис, 1997.

[51] Н. Г. Чеботарев. Основы теории Галуа, 1. М.–Л.: ГТТИ, 1934

[52] Н. Г. Чеботарев. Основы теории Галуа, 2. М.–Л.: ГТТИ, 1937.

[53] Н. Г. Чеботарев. Теория алгебраических функций. М.–Л.: ГТТИ, 1948; М.: УРСС, 2007.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

В книге использованы шрифты
гарнитуры ITC Charter.

Аскольд Георгиевич Хованский

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЛУА
РАЗРЕШИМОСТЬ И НЕРАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ
В КОНЕЧНОМ ВИДЕ

Технический редактор *В. Ю. Радионов*
Корректор *О. А. Васильева*

Тираж 400 экз. Заказ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
Тел. (495) 241–74–83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“»
121099, Москва, Шубинский пер., 6